Math. G.
50h
Boucharlat (J. L.)

<36632942810016

<36632942810016

Bayer. Staatsbibliothek

ANFANGSGRÜNDE

DER

DIFFERENZIAL-

UND

INTEGRAL-RECHNUNG

VON

J. L. BOUCHARLAT

AUS DEM FRANZÖSISCHEN ÜBERSETZT

VON

F. J. GOEBEL,

öffentlichen ordentlichen Professor der Mathematik an der Königlich Niederländischen hohen Schule zu Loewen.

Mit 6 Steinabdrücken.

FRANKFURT A. M.

IN DER ANDREAEISCHEN BUCHHANDLUNG.

1823.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.
Bayerische
Staatsbibliothek
München

DEM

HOCHWÜRDIGEN WOHLGEBORNEN

HERRN HERRN

JOSEPH LOREYE

Grofsherzoglich Badischem geistlichen Rathe, Professor und Director des Lyceums zu Rastadt,

ehrfurchtsvoll und dankbar gewidmet

vom Uebersetzer.

Ich habe mich lange nach dem Augenblicke gesehnt, der mir Gelegenheit geben möchte, Ihnen öffentlich beweisen zu können, mit welch' dankbarem Herzen ich mich stets Ihrer Wohlgewogenheit erinnere. Nur durch Ihr Bemühen, durch Ihren fruchtbaren Unterricht, durch Ihre freundschaftliche und väterliche Leitung konnte es mir möglich werden, in den Wirkungskreis zu

treten, wohin ich seit fünf Jahren berufen bin. Empfangen Sie für Alles hiedurch meinen kindlichen Dank; durch Sie danke ich meinen übrigen würdigen Lehrern; durch Sie danke ich innig dem Vaterlande, das mir unschätzbare Wohlthaten spendete.

Vorrede des Verfassers.

Es giebt in der Geschichte des menschlichen Wissens Epochen, wo der Geist, nach kühnem Aufschwung zu den erhabensten Begriffen, auf kurze Dauer still zu halten scheint, um bald mit erneuerter Kraft durch eine derjenigen Entdeckungen sich kund zu thun, wodurch die Wissenschaft in einem neuen Gewande erscheint.

So brach sich DECARTES durch seine Anwendung der Grundsäszte der Algebra auf die Geometrie eine seinen Vorgängern noch unbekannte Bahn. So setzten NEWTON und LEIBNITZ durch Erfindung einer neuen Analyse, erhabener noch als Decartes Geometrie, das gelehrte Europa in Erstaunen.

In der That! keine der Entdeckungen machte dem menschlichen Geiste je mehr Ehre; das Unendliche, dieses ideale Wesen, schien dem Calcul unterworfen, und Wunder zu wirken. Umsonst bemühten sich einige Philosophen, die Genauigkeit einer so eigenthümlichen Analyse in Zweifel zu ziehen, immer mussten sie die daraus abgeleiteten Resultate bezeugen, wodurch sie die Geometer aneiferten, immer mehr und mehr über die wahre

Metaphysik des neuen Calculs zu forschen. Newton drang zuerst in dieses Geheimniss ein, indem er die Differenzial-Rechnung als eine Methode der ersten und letzten Verhältnisse der Gröſsen, oder auch als die Endgränzen ihrer Verhältnisse betrachtete. D'Alembert trug Newton's Ideen als der wahren Metaphysik der Differenzial-Rechnung entsprechend vor, und bewies, daſs durch die Methode der Endgränzen, frei von aller Betrachtung der Bewegung, eine dem Differenzial-Calcul fremde Idee, jenen der Fluxionen der Britten eine befriedigende Erklärung sich geben lasse. Nach D'Alembert haben mehrere Geometer, unter andern Cousin, in ihren Schriften der Methode der Endgränzen den Vorzug gegeben. Aber erst seitdem diese Methode durch Hilfe des Taylor'schen Lehrsatzes bewiesen wurde, erlangte sie völlige Klarheit, und seitdem wurde aller Zweifel gehoben, der aus der scheinbaren Metaphysik der Lehre des unendlich Kleinen entspringen konnte, welche Lehre als eine Art Abkürzung jener der Endgränzen angesehen werden kann.

Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, ist die Lehre des unendlich Kleinen nichts weiter, als ein beschleunigendes Mittel zur Auffindung der Differenziale verschiedener Funktionen; sie gräbt diese Differenziale vermittelst geometrischer Figuren von

größster Einfachheit dem Gedächtnisse ein, die mehr unsere Einbildungskraft in Anspruch nehmen, als abstrakte Begriffe zu uns reden. Indeſs wird diese Methode in den höhern Theilen der Mechanik und der Astronomie unentbehrlich, indem bisweilen ohne ihre Beihilfe die Auflösung mancher Probleme ausserordentlich verwickelt würde; auch bedienen sich unsere ersten Geometer in den erhabensten Theilen ihrer Schriften dieser Lehre. Sie hatte sonst, selbst was ihre Metaphysik anbelangt, ihre heftigen Vertheidiger, weil, wenn man nicht von einer gewissen Reihe von Sätzen abweicht, Alles die mathematische Schärfe zu haben, und gleichsam ganz natürlich aus einem Fundamentalprincip zu fließen scheint. Dieser Hauptgrundsatz wurde bis auf den heutigen Tag für eine Art Axiom gehalten. Da aber die Ansicht, unter welcher wir dadurch das Unendliche fassen, auf Folgen führt, welche kaum zulässig sind; so glaubte ich ihn beweisen zu müssen, da ich der Lehre des unendlich Kleinen einen andern Grundsatz unterstellte, welcher gleichfalls auf die Begriffe, welche wir vom Unendlichen haben, sich gründend, besser dem Verstande durch die in ihm stillschweigend enthaltene Idee der Endgränzen Genüge leistet.

Wie die Lehre von den Endgränzen jene vom unendlich Kleinen ergänzt, indem dadurch das in letztere vorkommende Mangelhafte rectificirt wird, so ergänzt Lagrange's Methode jene der Endgränzen; indem sie die Differenzial - Coëfficienten an die reine Algebra knüpft.

Diese drei Methoden lassen sich daher so betrachten, als bildeten sie nur eine einzige. Auch findet man, wenn man sie miteinander vergleicht, dass dieselben Grundsätze, welche daraus hervorgehen, ihnen gemeinschaftlich sind, und dass man nur Weniges der Lehre der Endgränzen beizufügen brauche, um sie alle drei zu verstehen. Lagrange's Methode beschränkt sich alsdann einigermassen auf ein Theorem, welches ich durch verschiedene Modificationen, welche ich in seinem Beweise anbrachte, ausserordentlich leicht darstellte.

Ich habe mich ebenfalls bestrebt, die verschiedenen Theorien, die in diesem Werke vorkommen, in ein günstiges Licht zu setzen. Ich habe darin, wie in meinen übrigen mathematischen Werken, alle Geschäfte vorgenommen, in der Ueberzeugung, dass derjenige Verfasser, der sie überschlägt, keine günstige Meinung von seiner gründlichen Gelehrsamkeit einflössen kann, dass er nur nach der Deut-

lichkeit, mit der er seine Gedanken vorträgt, und nach den mehr oder weniger neuen Ansichten, die er in seine Schriften niederlegt, beurtheilt wird.

Zu diesen Betrachtungen will ich noch hinzufügen, dass, seitdem man sich bemüht, keine Zwischenbegriffe zu übergehen, man nur Kraft der Präcision, die dem Zusammenhange einer Lehre so schädliche Weitläufigkeit vermeiden kann; die Schwierigkeit wird noch um so grösser, sobald ein Theil des Werkes dazu bestimmt ist, Rechenschaft von den darin enthaltenen Gegenständen zu geben.

Aus der Menge der in diesem Buche behandelten Materien kann man noch besser auf die Hindernisse schliessen, welchen ich begegnen musste, da ich mich in dergleichen Schranken hielt. Unter den Zusätzen, womit ich diese neue Auflage vermehrte, gehören die Lehren von den einfachen Punkten; vom Grössten und Kleinsten der Funktionen zweier Veränderlichen; der Polarcurven; von der unabhängigen Veränderlichen; der particulären Auflösungen der Differenzial-Gleichungen; der Cubatur der von krummen Oberflächen begränzten Körper, wie auch der Quadratur dieser Oberflächen; der Integrabilitätsbedingung der Funktionen dreier Veränderlichen; der Differenzial-Gleichungen der zweiten Ordnung; der gleichzeitigen Gleichungen etc.;

endlich schloſs ich dieses Werk mit einer Theorie der Gleichungen mit partiellen Differenzialen, und mit einigen allgemeinen Betrachtungen über die willkührlichen Funktionen, wodurch ihre Integrale ergänzt werden. Hierdurch wurde ich auf die Erklärung des Verfahrens geführt, dessen man sich bedient bei Bestimmung der willkührlichen Funktion, welche in eine Gleichung aufgenommen wird, wenn die Bedingungsgleichungen gegeben sind.

Die Art und Weise, womit ich bei Betrachtung der krummen Oberflächen verfuhr, ist jener analog, deren ich mich bei den willkührlichen Constanten bediente. So habe ich auch mit Hilfe der Curven gezeigt, wie man dieselben Constanten, welche durch Differenziation verloren gegangen sind, nach geschehener Differenziation und Integration wieder auffinden kann, welche Untersuchung meines Wissens bis jetzt noch nicht vorgenommen würde.

Inhalts Anzeige.

Seite.

Von der Differenziation algebraischer Grössen. . . . 1
Von den verschiedenen Graden der Differenziale. . . . 17
Maclaurin's Theorem. 18
Differenziation transcendenter Grössen. 21
Von den logarithmischen Differenzialen; von den Differenzialen der Sinusse, Cosinusse, und der übrigen trigonometrischen Linien. 25
Differenziation einiger zusammengesetzten transcendenten Grössen. 30
Der Taylorsche Lehrsatz. 31
Anwendung der Taylorschen Formel bei Entwicklung verschiedener Funktionen in Reihen. 34
Von der Differenziation der Gleichungen mit zwei Veränderlichen. 36
Die Lehre von den Tangenten. 42
Anwendung der vorigen Formeln auf Beispiele. . . . 45
Von den Asymptoten der Curven. 46
Von der Gleichung einer Ebene, welche eine krumme Fläche berührt, und von der Normale dieser Fläche. . . 48
Von den Funktionen, welche für einen gewissen Werth, welchen man der Veränderlichen beilegt, $\frac{0}{0}$ werden. . 52
Vom Grössten und Kleinsten der Funktionen einer einzigen Veränderlichen. 60
Anwendung der Theorie des Grössten und Kleinsten bei Auflösung verschiedener Aufgaben. 66
Von der geometrischen Bezeichnung der Differenzial-Coëfficienten. 77
Allgemeine Betrachtungen über die einfachen Punkte der Curven. 83
Von den Einbiegungspunkten der Curven. 84
Von den Wendungspunkten. 91
Von den vielfachen Punkten. 95
Von den beigeordneten Punkten. 98
Von den berührenden Curven. 100
Anwendung des Taylorschen Lehrsatzes auf die Entwicklung der Funktionen zweier Veränderlichen, welche einen Zuwachs erhalten. 121

	Seite
Vom Grössten und Kleinsten bei Funktionen zweier Veränderlichen.	123
Von Umformung rechtwinklichter Coordinaten in Polar-Coordinaten.	125
Von der Umformung der Polar-Coordinaten in rechtwinklichte Coordinaten, und Bestimmung des Differenzialausdrucks eines Bogens einer Polar-Curve.	127
Von den Subtangenten, Subnormalen, Normalen und Tangenten der Polar-Curven.	129
Von der Bestimmung des Krümmungshalbmessers einer Polar-Curve.	132
Von den transcendenten Curven.	134
Von der Spirallinie des Archimedes oder des Conon.	134
Von der logarithmischen Spirale.	134
Von der hyperbolischen Spirallinie, und überhaupt von den Spirallinien, welche in der Gleichung $u = at^n$ begriffen sind.	139
Von der logarithmischen Linie.	140
Von der Cycloïde.	141
Von Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.	149
Von der Lehre des unendlich Kleinen.	156
Ueber Lagrange's Methode.	163
Von den Fällen, in welchen die Taylorsche Formel mangelhaft ist.	170

Integralrechnung.

	Seite.
Integralrechnung.	177
Von zusammengesetzten Differenzialen, derer Integration nach der Regel des Artikels (262) verrichtet werden kann.	181
Von den Differenzialen, deren Integrale Kreisbögen sind.	183
Von der Integration, welche theilweise verrichtet wird.	188
Von der Integration durch Reihen.	190
Von der Lehre der rationalen Brüche.	199
Von der Integration irrationaler Funktionen.	223
Von der Integration binomischer Faktoren.	230
Von den Reduktionsformeln der binomischen Differenziale.	235
Von der Integration jener Grössen, welche Sinusse und Cosinusse enthalten.	243
Von der Differenziation der Exponential- und logarithmischen Grössen.	250
Von der Bernoulli'schen Reihe.	253
Von der Quadratur der Curven.	255

Seite.

Von der Rectification der Curven. 261

Von der Bestimmung der krummen Oberfläche der Körper, welche durch Umdrehung eines Curvenbogens erzeugt werden. 264

Von der Cubatur der durch Umdrehung entstandenen Körper. 269

Von der Cubatur der durch krumme Oberflächen begränzten vermittelst doppelter Integrale. 272

Von der Quadratur der krummen Flächen, vermittelst doppelter Integrale. 275

Von der Integration der Funktionen zweier Veränderlichen. 279

Von der Trennung der Veränderlichen; von der linearen Gleichung der ersten Ordnung, und von den Eigenschaften homogener Funktionen. 279

Bedingungen der Integrabilität der Funktionen zweier Veränderlichen; Integration der Funktionen, welche diesen Bedingungen Genüge leisten. — Aufsuchung der Faktoren, wodurch Funktionen integrabel gemacht werden, die es zuvor nicht sind. 289

Von den Integrabilitäts Bedingungen der Funktionen dreier und mehrerer Veränderlichen. Integration der Gleichungen dreier Veränderlichen, welche hiebei Genüge leisten. Von der Bedingungsgleichung, vermöge welcher die Integration der Differenzialgleichungen mit drei Veränderlichen von einem gemeinschaftlichen Faktor abhängt, und von den Hilfsmitteln, einer gegebenen Gleichung Genüge zu leisten, wenn diese Bedingungsgleichung nicht Statt findet. 301

Theorie der willkührlichen Constanten. 308

Particuläre Auflösungen der Differenzialgleichungen der ersten Ordnung. 312

Von den lineären Gleichungen. 319

Von der Integration, die sich an einer Anzahl von Gleichungen gleichzeitig verrichten lässt. 326

Von der Integration einer Differenzialgleiehung der zweiten Ordnung. 330

Von den Gleichungen mit partiellen Differenzialen der ersten Ordnung. 333

Gleichungen mit partiellen Differenzialen der zweiten Ordnung. 347

Von Bestimmung der willkührlichen Funktionen, welche in die Integrale der Differenzialgleichungen mit partiellen Differenzialen aufgenommen werden. 350

Von den willkührlichen Funktionen, welche in den Integralen der Differenzialgleichungeu mit partiellen Differenzialen des zweiten Grades sich vorfinden. 358

Noten des Verfassers.

Seite.

Erste Note. Ueber die Art, die Entwicklung des Logarithmus von x + h zu finden. 361

Zweite Note. Ueber das Fundamental-Princip der Lehre der unbestimmten Coëfficienten. 363

Dritte Note. Ueber die Entwicklung der Potenzen von Cosinus und Sinus als Funktion der vielfachen Bögen. 363

Vierte Note. Ueber die Art der Bestimmung des Volumens solcher Körper, derer Oberfläche durch eine Funktion einer Veränderlichen ausgedrückt werden kann. . . 369

Fünfte Note. Ueber die Projection einer ebenen Fläche. . 371

Sechste Note. Ueber den Ausdruck des Cosinus des Winkels, welchen zwei Ebenen unter sich bilden, der direkt auf eine ganz neue Art bestimmt werden soll. 372

Siebende Note. Ueber die Curven mit doppelter Krümmung, welche mit Hilfe zweier Gleichungen zwischen drei Veränderlichen construirt werden kann. . . 374

Achte Note. Neuer Beweis für die Integration der Gleichungen mit partiellen Integralen. 375

Neunte Note. Ueber die Integration rationaler Funktionen, welche in ihren Nennern, die gleich Null gesetzt werden, imaginäre und gleiche Wurzeln enthalten. . 377

Anfangsgründe
der
Differenzial- und Integralrechnung.

Die Differenzialrechnung.

Von der Differenziation algebraischer Grössen.

1) Eine veränderliche Grösse heisst *Funktion* einer andern Veränderlichen, wenn erstere einem aus der zweitern znsammengesezten analytischen Ausdrucke gleich ist. So z. B. ist y eine Funktion von x in folgenden Gleichungen:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}; \quad y = x^3 - 3\,bx^2;$$

$$y = \frac{x^2}{a}; \quad y = b + cx^3.$$

2) Wir wollen nun eine Funktion im Zustande ihres Wachsthums betrachten, welcher eine Folge des Zunehmens der in ihr enthaltenen Veränderlichen ist. Jede Funktion einer Veränderlichen x kann durch die Ordinate einer Curve BMM. Fig. 1, vorgestellt werden; es seien nämlich AP $= x$, PM $= y$ die Coordinaten eines Curvenpunktes M, und die Abscisse x wachse um PP' $= h$; die Ordinate PM wird alsdann P'M' $= y'$. Um nun den Werth dieser neuen Ordinate zu finden, muss man in der Gleichung der Curve $x + h$ für x schreiben, und der Werth, welcher sich aus dieser Gleichung für y ergiebt, wird der Werth von y' sein.

Wäre z. B. die Gleichung $y = mx^2$ gegeben, so würde man y' durch Substitution von $x + h$ für x, und Umänderung des y in y' erhalten, nämlich

$$y' = mx^2 + 2mxh + mh^2.$$

3) Es sei ferner

$$y = x^3 \ldots\ldots (1),$$

wo y in y' für $x + h$ statt x gesezt übergehen soll; man hat nach diesem

$$y' = (x + h)^3,$$

oder

$$y' = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

Wird hievon die Gleichung (1) abgezählt, so bleibt:

$$y' - y = 3x^2h + 3xh^2 + h^3;$$

dividirt man durch h,

$$\frac{y' - y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \ldots\ldots (2);$$

$y' - y$ bezeichnet das Wachsthum der Funktion von y, wenn x um h wächst; denn $y' - y$ ist der Unterschied des neuen Grössenzustandes von y und des ursprünglichen Zustandes.

Ist nun auf der andern Seite h das Wachsthum von x, so folgt, dass der Ausdruck $\frac{y' - y}{h}$ das Verhältniss der Funktion y zum Wachsthume der Veränderlichen x ist. Betrachtet man den zweiten Theil der Gleichung (2), so geht daraus hervor, dass dieses Verhältniss um so mehr abnehme, als h abnimmt, und wenn h in Null übergeht, dieses Verhältniss $3x^2$ werde.

Dieser Ausdruck ist also die Endgränze des Verhältnisses $\frac{y' - y}{h}$, bis dahin geht dieses Verhältniss, wenn man h abnehmen lässt.

4) Zufolge der Hypothese $h = o$ geht $\frac{y' - y}{h}$ in $\frac{0}{0}$ über, wenn das Wachsthum von y Null wird, mithin die Gleichung (2)

$$\frac{0}{0} = 3x^2 \ldots\ldots (3).$$

Diese Gleichung enthält nichts Widersprechendes; denn schon die Algebra lehrt uns, dass $\frac{0}{0}$ alle Arten von Grössen bezeichnen kann. Indess weiss man, dass ein Bruch nichts an seinem Werth verliert, wenn man seinen Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl vervielfacht; hieraus erhellet, dass die Kleinheit der Glieder eines Bruches keinen Einfluss auf seinen Werth habe, und er also unverändert bleiben könne, wenn seine Glieder auf den niedrigsten Grad von Grösse gekommen, d. h. wenn sie Null geworden sind.

Der Bruch $\frac{0}{0}$ (*) in der Gleichung (3) ist ein Symbol, welches den Platz des Verhältnisses des Wachsthums der Funktion zum Wachsthume der Veränderlichen eingenommen hat; da nun in diesem Symbol keine Spur mehr von dieser Veränderlichen sich vorfindet, wollen wir es durch $\frac{dy}{dx}$ bezeichnen; dieses $\frac{dy}{dx}$ wird uns alsdann erinnern, dass die Funktion y und die Veränderliche x war; allein dy und dx sind keine Nullen; desswegen hat man

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \ldots\ldots (4)$$

der Ausdruck $\frac{dy}{dx}$, oder vielmehr sein Werth $3x^2$ ist dasjenige, was man den *Differenzial-Coefficienten* der Funktion y zu nennen pflegt.

5) Da $\frac{dy}{dx}$ ein Zeichen ist, wodurch die Endgränze $3x^2$ vorgestellt wird (wie dieses aus der Gleichung (4) erhellet), so muss man nothwendig dx immer unter dy

*) Ueber den Begriff des Differenzials lese man *Fischer Untersuchung über den eigentlichen Sinn der höhern Analysis* pag. 124. *Tobias Mayer* höhere Analysis. Tom. I. pag. 68. (Anmerk. des Uebers.)

schreiben; um indess die Geschäfte der Algebra zu erleichtern, kann man den Nenner der Gleichung (4) für einen Augenblick aufheben; hiedurch erhält man

$$dy = 3x^2dx;$$

Dieser Ausdruck wird das *Differenzial* der Funktion y genannt.

6) Man suche ferner das Differenzial von $a + 3x^2$. Man setze $x + h$ für x in die Gleichung $y = a + 3x^2$, und verwandle y in y'; hiedurch geht die gegebene Gleichung in folgende über:

$$y' = a + 3x^2 + 6xh + 3h^2,$$

mithin $$\frac{y' - y}{h} = 6x + 3h;$$

wird $h = o$ gesezt, so ist $\frac{dy}{dx} = 6x$; das gesuchte Differenzial ist also $dy = 6xdx$.

7) Als ein drittes Beispiel besimme man das Differenzial von

$$y = ax^3 - b^3.$$

Wird $x + h$ für x in diese Gleichung eingeführt, so hat man:

$$y' = ax^3 + 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3 - b^3;$$

also

$$\frac{y' - y}{h} = 3ax^2 + 3axh + ah^2;$$

nimmt man die Endgränze, so hat man

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2,$$

und diess ist der Differenzial-Coefficient der gegebenen Funktion.

8) Es sei das Differenzial von

$$y = \frac{1 - x^3}{1 - x}$$

zu suchen.

Verrichtet man die Division wirklich, so findet man:

$$y = 1 + x + x^2;$$

schreibt man $x + h$ für x und y' an die Stelle von y, so erhält man

$$y' = 1 + x + h + x^2 + 2hx + h^2,$$

und nach h geordnet:

$$y' = 1 + x + x^2 + (2x + 1) h + h^2,$$

also

$$\frac{y' - y}{h} = 2x + 1 + h,$$

und für das Gränzverhältniss

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 1;$$

das Differenzial von $\frac{1 - x^3}{1 - x}$ ist mithin $(2x + 1)\,dx$.

9) Es sei ferner:

$$y = (x^2 - 2a^2)(x^2 - 3a^2);$$

nach *vollen*deter Vervielfachung hat man

$$y = x^4 - 5a^2x^2 + 6a^4.$$

Durch Substitution von $x + h$ für x, und Anordnung des Ganzen nach h, ergiebt sich $y' = x^4 - 5a^2x^2 + 6a^4 + (4x^3 - 10a^2x) h + (6x^2 - 5a^2) h^2 + 4xh^3 + h^4$; also

$$\frac{y' - y}{h} = 4x^3 - 10a^2x + (6x^2 - 5a^2) h + 4xh^2 + h^3;$$

und für das Gränzverhältniss

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 10a^2x,$$

wird durch dx vervielfacht, so findet man für das Differenzial

$$dy = (4x^3 - 10a^2x)\,dx.$$

10) Der Ausdruck dx ist selbst das Differenzial von x; denn es sei $y = x$, so hat man $y' = x + h$; also $y' - y = h$, und $\frac{y' - y}{h} = 1$. Da die Grösse h in dem zweiten Theile dieser Gleichung nicht vorkömmt, so erkennt man leicht, dass, um zur Endgränze über-

zugehen, man nur $\frac{y' - y}{h}$ in $\frac{dy}{dx}$ umzuändern brauche; diess giebt $\frac{dy}{dx} = 1$, folglich $dy = dx$.

Eben so würde man finden, dass adx das Differenzial von ax ist.

11) Es ist zu bemerken, dass bisweilen das Wachsthum der Veränderlichen negativ ist; in diesem Falle muss man $x - h$ für x substituiren, und wie vorhin verfahren.

Um also das Differenzial von ax^3 zu finden, wenn das Wachsthum negativ ist, setze man $x - h$ statt x, und man erhält:

$$y' = ax^3 - 3ax^2h + 3axh^2 - ah^3, \text{ also}$$

$\frac{y' - y}{h} = - 3ax^2 + 3axh - ah^2$; und für das Gränzverhältniss $\frac{dy}{dx} = - 3ax^2$, folglich $dy = - 3ax^2dx$.

Hieraus sieht man, dass man, um dieses Differenzial zu erhalten, nur in dem Differenzial für die Funktion y, welches in der Voraussetzung eines positiven Zunehmens berechnet ist, dx negativ zu setzen brauche.

12) Bevor wir weiter gehen, wollen wir eine wesentliche Bemerkung machen, nämlich, dass wenn in einer Gleichung, deren zweiter Theil eine Funktion von x ist, und die wir desshalb überhaupt durch $y = f(x)$ bezeichnen wollen, x in $x + h$ verwandelt; und die Glieder nach den Potenzen von h geordnet werden, in folgende Reihe:

$y' = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots\ldots$ immer $y = A$ sein muss. Denn setzt man $h = o$, so wird der zweite Theil der Funktion auf A reducirt; hinsichtlich des ersten Theiles muss man, sobald h Null wird, den Accent von y weglassen, da er bloss desswegen dem y beigegeben wurde, um eine gewisse Veränderung anzuzeigen, welche die Funktion durch Substitution von

$x + h$ für x erleidet; die Gleichung (2) geht alsdann in folgende über:

$$y = A.$$

13) Diess giebt uns nun Mittel an die Hand, das Verfahren beim Differenziiren zu verallgemeinen. Denn wenn man in der Gleichung $y = fx$, wo der Ausdruck fx als bekannt vorausgesezt wird, $x + h$ statt x geschrieben und nach h geordnet hat, so wird dadurch folgende Entwicklung erhalten:

$$y' = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots .$$

oder vielmehr nach dem vorhergehenden Artikel:

$$y' = y + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots .$$

und hiernach

$$y' - y = Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots .$$

folglich

$$\frac{y'-y}{h} = B + Ch + Dh^2 + \ldots .$$

und für das Gränzverhältniss

$$\frac{dy}{dx} = B.$$

Hieraus lernen wir, dass der Differenzial-Coefficient dem Coefficienten desjenigen Gliedes gleich ist, welches in der Entwicklung von $f(x + h)$, die nach den wachsenden Potenzen von h geordnet ist, mit der ersten Potenz von h behaftet vorkömmt.

14) Hat man statt einer Funktion, die um einen der Veränderlichen x beigelegten Werth wächst, zwei andere Funktionen, die wir durch y und z bezeichnen wollen; so gehen sie durch Substitution von $x + h$ für x in y' und z' über; denkt man sich die Reihen nach h geordnet, so ist:

$$y' = y + Ah + Bh^2 + \ldots \ldots (5)$$
$$z' = z + A'h + B'h^2 + \ldots . (6);$$

nimmt man das Gränzverhältniss, so findet man:

$$\frac{dy}{dx} = A; \frac{dz}{dx} = A' \ldots \ldots (7);$$

wird die Gleichung (5) durch die Gleichung (6) vervielfacht, so entsteht:

$$\begin{aligned} y'z' = zy &+ Azh + Bzh^2 + \ldots \\ &+ A'yh + AA'h^2 + \ldots \\ &\qquad + B'yh^2 + \ldots \end{aligned}$$

also

$$\frac{y'z' - yz}{h} = Az + A'y + (Bz + AA' + B'y)h + \ldots;$$

nimmt man das Gränzverhältniss und bezeichnet durch einen Punkt, was differenziirt werden soll, so erhält man:

$$\frac{\text{D. } yz}{dx} = Az + A'y;$$

schreibt man für A, A' ihre Werthe aus (7), so ergiebt sich:

$$\frac{\text{D. } yz}{dx} = \frac{zdy}{dx} + \frac{ydz}{dx};$$

lässt man den gemeinschaftlichen Nenner dx weg,

$$\text{D. } yz = zdy + ydz.$$

Um also das Differenzial eines Produkts zweier Veränderlichen zu erhalten, muss man jede von ihnen durch das Differenzial der andern vervielfachen.

15) Mit Hilfe dieser Regel findet man leicht das Differenzial eines Produkts dreier Veränderlichen.

Wäre z. B. yzu gegeben, so setze man $yz = t$, und es ist D. yzu = D. tu. Nun aber ist nach dem Vorhergehenden

$$\text{D. } tu = tdu + udt \ldots\ldots (8),$$

und weil dt = D. yz, mithin

$$dt = ydz + zdy;$$

werden die Werthe von t und dt in die Gleichung (8) eingeführt, so erhält man:

$$dyzu = yzdu + yudz + zudy.$$

Man sieht hieraus, dass dieselbe Regel noch für ein Produkt dreier Veränderlichen bestehe; *man schreibe nämlich das Produkt yzu, an die Stelle jeder Veränderlichen setze man nach und nach ihr Differenzial, bringe*

hierauf diese Produkte in eine Summe, welche dann das Differenzial eines Produkts dreier Veränderlichen sein wird.

16) Dieselbe Regel gilt für eine grössere Anzahl von Veränderlichen.

17) Nach Art. 10 ist adx das Differenzial von ax; hieraus können wir schliessen, dass wenn in einem Produkte sich eine Constante vorfindet, man nur, als wäre die Constante nicht vorhanden, zu differenziiren, und hernach durch die Constante zu multipliciren brauche.

So z. B. ist axdy + aydx das Differenzial von axy.

18) Eine Constante hat kein Differenzial; denn es sei $y = ax + b$, und man verfährt nach Art. 7, so findet man $dy = adx$, d. i. dasselbe Resultat, als wäre b gar nicht vorhanden gewesen.

19) Das Differenzial eines Bruches $\frac{x}{y}$ ist $\frac{ydx - xdy}{y^2}$; denn man setze $\frac{x}{y} = z$, so ist $x = yz$, und nach Art. 14, $dx = ydz + zdy$; hieraus geht hervor $ydz = dx - zdy$, und wird für z sein Werth gesezt,

$$ydz = dx - \frac{x}{y}\,dy;$$

wird unter einerlei Benennung gebracht,

$$ydz = \frac{ydx - xdy}{y},$$

durch y dividirt, und D. $\frac{x}{y}$ für dz geschrieben,

$$\mathrm{D.}\,\frac{x}{z} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Das Differenzial eines Bruchs wird also erhalten, *wenn das Differenzial des Zählers durch den Nenner vervielfacht, von diesem Produkte jenes aus dem Zähler in das Differenzial des Nenners abgezogen und dieser Unterschied durch das Quadrat des Nenners dividirt wird.*

20. Wenn in der Gleichung

$$\mathrm{D}.\,yzu = yzdu + yudz + zudy,$$ Art. 15, alle Glieder durch yzu dividirt werden, so erhält man:

$$\frac{\mathrm{D}.\,yzu}{yzu} = \frac{du}{u} + \frac{dz}{z} + \frac{dy}{y};$$

und dividirt man überhaupt das Differenzial eines Produkts irgend einer Anzahl von Veränderlichen, so wird man finden:

$$\frac{\mathrm{D}.\,xyztu\ldots}{xyztu\ldots} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \ldots \quad (9).$$

Ist $x = y = z = t = u = \ldots\ldots$, und die Anzahl der Faktoren m; so hat man im zweiten Theile dieser Gleichung m Glieder, alle gleich $\frac{dx}{x}$; dieser zweite Theil verwandelt sich also in $\frac{mdx}{x}$, und die Gleichung (9) geht über in folgende:

$$\frac{\mathrm{D}.\,x^m}{x^m} = m\frac{dx}{x};$$

multiplicirt man durch x^m; so entsteht

$$\mathrm{D}.\,x^m = mx^{m-1}\,dx.$$

21 Hieraus lässt sich folgende Regel ableiten: *Um das Differenzial der mten Potenz einer Veränderlichen zu erhalten, muss man* 1) *den Exponenten der Veränderlichen zum Coefficienten machen;* 2) *den Exponenten um eine Einheit vermindern;* 3) *und endlich dieses Produkt durch dx vervielfachen.*

22) Wäre der Exponent eine gebrochene, oder eine negative Zahl, so gälte dieselbe Regel. Um den erstern Fall zu beweisen, sei $y = x^{\frac{p}{q}}$; erhebt man beide Glieder zur Dignität q, so ist

$$y^q = x^p;$$

folglich, Art. 21,

$$qy^{q-1}dy = px^{p-1}dx;$$

hieraus

$$dy = \frac{px^{p-1}dx}{qy^{q-1}};$$

da x^{p-1} durch $\frac{x^p}{x}$, und y^{q-1} durch $\frac{y^q}{y}$ dargestellt werden kann; so hat man, nachdem diese Bezeichnung eingeführt worden ist,

$$dy = \frac{px^p}{qy^q} \cdot \frac{y}{x}\, dx;$$

und wegen $x^p = y^q$, erhält die vorige Gleichung folgende Form

$$dy = \frac{p}{q} \cdot \frac{y}{x}\, dx;$$

sezt man endlich für y seinen Werth,

$$dy = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{\frac{q}{p}}}{x} \cdot dx;$$

Lässt man den Nenner x in den Zähler übergehen, so hat man

$$dy = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q} - 1}\, dx.$$

Man würde zu demselben Differenzial von $y = x^{\frac{p}{q}}$ gelangt sein, wenn man von der Regel Nro. 21 Gebrauch gemacht hätte.

Um den Fall zu beweisen, wo der Exponent negativ ist, sei $y = x^{-p}$, oder $y = \frac{1}{x^p}$;

Differenziirt man nach der Regel, welche Art. 21 für die Differenziation der Brüche aufgefunden wurde, so erhält man:

$$dy = \frac{x^p\,d.1 - 1.dx^p}{x^p \times x^p}.$$

Bemerkt man, dass die Einheit eine Constante, mithin ihr Differenzial Null ist, so ändert sich voriger Ausdruck in folgenden

$$dy = -\frac{dx^p}{x^{2p}};$$

wird die angezeigte Differenziation nach Art. 21 vorgenommen, so ergiebt sich $dy = -\frac{px^{p-1}dx}{x^{2p}}$; und zieht man den Exponenten 2p von p — 1 ab, so gelangt man zulezt zu $dy = -px^{-p-1}dx$, wie man auch durch Anwendung der Regel Nro. 21 gefunden hätte.

23) Ersetzt man die Wurzelzeichen durch gebrochene Exponenten, so kann die Regel Nro. 21 dienen, dergleichen Grössen zu diverenzüren.

Um z. B. das Differenzial von $\sqrt{z}$ zu finden, wird man $z^{1/2}$ schreiben, dessen Differenzial $\frac{1}{2}z^{-1/2} = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$.

Hieraus lernt man, *dass das Differenzial der Quadratwurzel einer Veränderlichen gleich ist dem Differenzial dieser Grösse durch das Doppelte ihrer Quadratwurzel dividirt.*

24) Bisweilen sind die Funktion y und die Veränderliche x nicht durch *eine* Gleichung gegeben, wie z. B. $y = fu$, und $u = \varphi x$. Das erste Mittel den Differenzial-Coefficienten $\frac{dy}{dx}$ zu erhalten, wäre die Elimination des u aus den beiden Gleichungen, um dabei das Verfahren der Differenziation in Anwendung zu bringen. Ohne jedoch seine Zuflucht zu diesem Vorbereitungsgeschäfte zu nehmen, kann man unmittelbar zu dem Diffe-

renzial Coefficienten $\frac{dy}{dx}$ gelangen, welches der Gegenstand des folgenden Beweises sein wird.

Nehmen wir also an, dass, wenn $x + h$ für x in die Gleichung $u = \varphi x$ gesetzt wird, u in $u' = u + k$, und nachdem $u + k$ für u in die Gleichung $y = fx$ substituirt ist, die Funktion y in y' übergehe; wenn ferner bei Entwicklung der Funktionen von u und x nach den Potenzen ihres Wachsthums geordnet, die Substitution des $x + h$ für erzeugt:

$$u' = u + qh + q'h^2 + q''h^3 + \ldots$$

und

$$y' = y + pk + p'k^2 + p''k^3 + \ldots$$

für u den Werth $u + k$ gesetzt; so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u' - u}{h} &= q + q'h + q''h^2 + \ldots \\ \frac{y' - y}{k} &= p + p'k + p''k^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (10)$$

Multiplicirt man diese Gleichungen durcheinander, so entsteht:

$$\frac{y' - y}{k} \cdot \frac{u' - u}{h} =$$

$$= (p + p'k + p''k^2 + \ldots)(q + q'h + q''h^2 + \ldots)$$

Der erste Theil dieser Gleichung lässt sich kürzer ausdrücken; denn das Wachsthum von u, welches durch k bezeichnet wurde, ist gleich $u' - u$; folglich statt $\frac{y' - y}{k} \cdot \frac{u' - u}{h}$ kann man $\frac{y' - y}{h}$ schreiben, und setzt man $x' - x$ für h, so geht die vorhergehende Gleichung in folgende über:

$$\frac{y' - y}{x' - x} (= q + q'h + q''h^2 + \ldots)(p + p'k + p''k^2 \ldots) \ldots (11)$$

Wenn h Null ist, so verschwindet es auch (denn u ist nur desswegen um k gewachsen, weil x in $x + h$ verwandelt worden war;) im Falle also $h = 0$ wird, ändert sich die Gleichung (11) für das Gränzverhältniss in folgende:

$$\frac{dy}{dx} = pq \; \ldots\ldots (12)$$

Um p und q zu bestimmen, müssen h und k in (10) Null angenommen werden, und diese Gleichungen liefern alsdann:

$$\frac{dy}{du} = p, \; \frac{du}{dx} = q.$$

Substituirt man diese Werthe von p und q in die Gleichung (12), so wird man erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \; \ldots (13).$$

Dieses Resultat lehrt uns, dass wenn zwei Gleichungen

$$y = fu$$

und

$$u = fx$$

gegeben sind, der Werth von $\frac{dy}{dx}$ bestimmt werde, indem man die Differenzial-Coefficienten $\frac{dy}{du}$, $\frac{du}{dx}$ aus den gegebenen Gleichungen durcheinander vervielfacht.

25) Wären z. B. die Gleichungen

$$y = 3u^2 \text{ und } u = x^3 + ax^2$$

gegeben, so erhält man:

$$\frac{dy}{du} = 6u, \; \frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax;$$

folglich, wenn man diese Gleichungen durcheinander multiplicirt,

$$\frac{dy}{dx} = 6u\,(3x^2 + 2ax) = 6\,(x^3 + ax^2)\,(3x^2 + 2ax).$$

26) Diese Formel ist von grossem Nutzen bei Differenzïirung zusammengesetzter Grössen, worüber hier einige Beispiele folgen.

1. Man suche das Differenzial von $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, oder man suche den Differenzial-Coefficienten $\frac{dy}{dx}$. Man mache desshalb $a^2 - x^2 = u$, dann ist $y = \sqrt{u} = u^{1/2}$, und die Gleichungen $y = fu$, $u = \varphi x$, Art. 24, sind hier durch $y = u^{1/2}$, $u = a^2 - x^2$ dargestellt.

Differenzïirt man diese Gleichungen, so findet man, Art. 21,

$$\frac{dy}{du} = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \tfrac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-1/2},$$

$$\frac{du}{dx} = -2x;$$

multiplicirt man diese Differenzial-Coefficienten untereinander, so entsteht

$$\frac{dy}{dx} = -x(a^2 - x^2)^{-1/2} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

also

$$dy = \frac{-xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

2. Es sei ferner $y = (a + bx^m)^n$; und das Differenzial zu finden, setze man $a + bx^m = u$, man hat die Gleichungen $y = u^n$, $u = a + bx^m$; folglich

$$\frac{dy}{du} = nu^{n-1} = n(a + bx^m)^{n-1},$$

$$\frac{du}{dx} = bmx^{m-1};$$

vervielfacht man diese Differenzial-Coefficienten durcheinander, so ergiebt sich

$$\frac{dy}{dx} = bmnx^{m-1}(a + bx^m)^{n-1}$$

27) Als drittes Beispiel sei

$$y = \left(a + \sqrt{b - \frac{c}{x^2}}\right)^4.$$

Man setze $b - \frac{c}{x^2} = u \ldots (14)$

mithin

$$y = (a + \sqrt{u})^4 \ldots (15)$$

Differenzïirt man die Gleichung (14), so erhält man

$$du = \frac{2cxdx}{x^4},$$

also

$$\frac{du}{dx} = \frac{2c}{x^3};$$

die Gleichung (15) giebt

$$dy = 4(a+\sqrt{u})^3\, d(a+\sqrt{u}) = 4(a+\sqrt{u})^3 \frac{du}{2\sqrt{u}};$$

Wird für u sein Werth eingeführt, so ist

$$\frac{dy}{du} = \frac{2\left(a+\sqrt{b-\frac{c}{x^2}}\right)^3}{\sqrt{b-\frac{c}{x^2}}};$$

durch Multiplication dieser Differenzial-Coefficienten,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{4c}{x^3}\left(a+\sqrt{b-\frac{c}{x^2}}\right)^3}{\sqrt{b-\frac{c}{x^2}}}.$$

Wäre noch $y = (a+\sqrt{x})^3$ gegeben, so fände man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(a+\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}$$

28) Obgleich das Differenzial mehrerer Funktionen einer Veränderlichen offenbar nach dem Vorhergehenden der Summe der Differenziale dieser Funktionen gleich ist, so wollen wir doch einen Beweis dieses Lehrsatzes hier mittheilen.

Es sei also

$$y = fx + Fx + \varphi x.$$

Man setze $x + h$ für x in diese Funktionen, und nehme an, es sei

$$\begin{aligned} y' = \; & fx + Ah + A'h^2 + \;.\;.\;. \\ & + Fx + Bh + B'h^2 + \;.\;.\;. \\ & + \varphi x + Ch + C'h^2 + \;.\;.\;. \end{aligned}$$

hieraus

$$y' - y = (A + B + C)\,h + (A' + B' + C')\,h^2,$$

folglich

$$\frac{dy}{dx} = A + B + C,$$

und

$$dy = Adx + Bdx + Cdx.$$

Da aber A, B, C, die Glieder sind, welche in den Entwicklungen von f $(x + h)$, F $(x + h)$, φ $(x + h)$ mit der niedrigsten Potenz von h behaftet sind, so folgt, dass $Adx + Bdx + Cdx$ die Summe der Differenziale der gegebenen Funktionen bezeichnet.

29) Wir wollen das Vorhergehende durch die Bemerkung schliessen, dass die Ausdrücke, die nur durch Constanten voneinander verschieden sind, dieselben Differenziale haben. So z. B. $mx + nx^2 + a^2$ und $mx + nx^2 + ac$ haben dasselbe Differenzial, welches schon daraus erhellet, weil eine Constante kein Differenzial hat.

Von den verschiedenen Graden der Differenziale.

30) Es sei y eine Funktion von x, wenn sie differenzürt wird, findet man ein Resultat von der Form pdx (p kann auch noch x enthalten). Enthält p noch x, so kann auch p differenzürt und das erhaltene Resultat durch qdx bezeichnet werden. Verfährt man eben so mit q, so wird das Resultat von der Form rdx sein müssen.

Durch pdx, qdx, rdx, ist die Ordnung der Differenziale von y dargestellt. Wäre z. B. $y = ax^3$, so fände man $dy = 3ax^2\,dx$; also $p = 3ax^2$. Differenzürt man von neuem, so erhält man $dp = 6axdx$, also $q = 6ax$; wird das Geschäft wiederholt, so ist zuletzt $dq = 6adx$, mithin $r = 6a$, wo keine Differenziation mehr Statt finden kann, weil 6a eine Constante ist.

Die Gleichungen

$dy = pdx$ geben, durch dx dividirt, $\frac{dy}{dx} = p$

$dp = qdx$ „ „ „ „ $\frac{dp}{dx} = q$

$dq = rdx$ „ „ „ „ $\frac{dq}{dx} = r$

Da q durch eine zweimal wiederholte Differenziation und durch Division mit dx erhalten wurde, so lässt sich diess Geschäft durch $\frac{d^2y}{dx^2}$ bezeichnen, und wir werden $\frac{d^2y}{dx^2} = q$ haben; eben so, wenn man von neuem differenzürt und durch dx dividirt, $\frac{d^3y}{dx^3} = r$, u. s. w.

dy ist das *erste Differenzial* von y;
d^2y ist das *zweite* „ „ „
d^3y ist das *dritte* „ „ „

Theorem des Maclaurin.

31) Es sei y eine Funktion von x; ordnet man nach x, und nimmt an,

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots \quad (16)$$

so findet man durch Differenziation und Division durch dx

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + \ldots$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2.3D + 2.3.4Ex + \ldots$$

Wir wollen den Werth von y, welchen man erhält, wenn $x = o$ wird, durch (y); durch $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ den Werth, welchen $\frac{dx}{dy}$ erhält, wenn $x = o$; durch $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ wenn darin $x = o$; u. s. w. bezeichnen. Die vorigen Gleichungen liefern uns

$$(y) = A;\ \left(\frac{dy}{dx}\right) = B;\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 2C;\ \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 2.3.D;$$

woraus sich ergiebt, dass

$$A = (y);\ B = \left(\frac{dy}{dx}\right);\ C = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right);\ D = \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$$

Werden diese Werthe in die Gleichung (16) eingeführt, so geht sie in folgende über:

$$y = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) x^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) x^3$$

$$\ldots (17)$$

Man nennt diese Formel das *Theorem* des *Maclaurin.*

32) Um von dieser Formel Gebrauch su machen, sei zuerst $y = \frac{1}{a + x}$; wird differenziirt,

$$dy = \frac{(a+x)\, d.\, 1 - 1.\, d.\, (a+x)}{(a+x)^2} = -\frac{dx}{(a+x)^2},$$

und hieraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(a+x)^2};$$

wird das Differenziations-Geschäft wiederholt, so erhalten wir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(a+x)}{(a+x)^4} = \frac{2}{(a+x)^3};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{2.\,3(a+x)^2}{(a+x)^6} = -\frac{2\,.\,3}{(a+x)^4};$$

setzt man in den Werthen für $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ $x = o$, so findet sich:

$$(y) = \frac{1}{a}; \left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{a^2}; \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{2}{a^3}; \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = -\frac{2.3}{a^4};$$

substituirt man diese Werthe und den von y in der Gleichung (17), so ist:

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \ldots$$

33) Ferner sei $y = \sqrt{a^2 + bx}$; man hat also:

$$y = (a^2 + bx)^{1/2},$$

$$\frac{dy}{dx} = 1/2\, (a^2 + bx)^{-1/2}\, b = 1/2\, \frac{b}{\sqrt{a^2 + bx}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} (a^2 + bx)^{-3/2} b^2 = -\frac{\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} b^2}{\sqrt{(a^2 + bx)^3}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\,(a^2+bx)^{-5/2}\,b^3 = \frac{\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\,b^3}{\sqrt{(a^2+bx)^5}};$$

wird $x = o$, so verwandeln sich diese Werthe in:

$$(y) = (a^2)^{1/2} = a;\ \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a};$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,b^2}{a^3};\ \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\,b^3}{a^5};$$

und diese Werthe wiederum in der Formel (17) substituirt, geben:

$$\sqrt{a^2+bx} = a + \frac{bx}{2a} - \frac{b^2x^2}{8a^3} + \frac{b^3x^3}{16a^5} - \ldots$$

34) Es sei drittens

$$y = (a+x)^m;$$

differenziirt man, so ist:

$$\frac{dy}{dx} = m\,(a+x)^{m-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m\,(m-1)\,(a+x)^{m-2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m\,(m-1)\,(m-2)\,(a+x)^{m-3};$$

Macht man $x = o$, so geht y in a^m über, also

$$(y) = a^m,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = ma^{m-1},$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = m\,(m-1)\,a^{m-2},$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = m\,(m-1)\,(m-2)\,a^{m-3}$$

werden die Werthe von (y), $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ... in die Gleichung (17) eingeführt, so findet man:

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m\,(m-1)}{1\cdot 2}\,a^{m-2}x^2$$

$$+ \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,a^{m-3}x^3 + \ldots$$

Differenziation transcendenter Grössen.

35) Man nennt jene Grössen transcendente, deren Exponenten veränderliche Grössen sind, die Logarithmen, Sinusse, Cosinusse, . . . enthalten.

36) Gesetzt es sei nun A^x zu differenzüren, und $y = A^x$. Ändert sich x in x + h, und y in y'; so erhält man diese Gleichung:

$$y' = a^{x+h},$$

oder vielmehr

$$y' = a^x a^h.$$

Man entwickle nun diesen Ausdruck nach den Potenzen von h; damit diess aber vermittelst der Binomialformel geschehen könne, setze man a = 1 + b, folglich $a^h = (1 + b)^h$,

und

$$(1 + b)^h = 1 + h.\frac{b}{1} + h(h-1)\frac{b^2}{1.2}$$

$$+ h(h-1)(h-2)\frac{b^3}{1.2.3} + \ldots \quad (18)$$

Man ordne nun nach h; da wir aber nur der Glieder bedürfen, welche mit der ersten Potenz von h behaftet sind, so wollen wir dieses Geschäft einstweilen dahin gestellt sein lassen, und bemerken, dass wenn in einem Produkte, wie h (h — 1) (h — 2) (h — 3) . . . der Theil (h — 1) (h — 2) (h — 3) . . . aus n Faktoren besteht, seine Entwicklung nach der Theorie der Gleichungen von der Form

$$h^n + Ah^{n-1} + Bh^{n-2} \ldots + Mh + N$$

und dass das Glied N aus den zweiten Theilen — 1, — 2, — 3, . . . der zweitheiligen Grössen (h — 1), (h — 2), (h — 3), . . . zusammengesetzt sein werde; da aber $h(h-1)(h-2)(h-3)\ldots = h(h^n + Ah^{n-1} + \ldots + Mh + N)$,

es ist klar, dass Nh dasjenige Glied, welches in diesem Produkte mit der ersten Potenz von h behaftet, oder nach dem Vorhergehenden $(-1 \times -2 \times -3 \times \ldots)h$ sein werde; hieraus kann man folgende Regel zur

Bildung der Coëfficienten der ersten Potenz von h in den zusammengesetzten Gliedern der Reihe (18), d. i. vom dritten Gliede an ableiten, nämlich: *Der Coëfficient von* h *ist das Produkt aus den von* h *abgezogenen Zahlen* in $\frac{b^2}{1.2}$ im dritten; in $\frac{b^3}{1.2.3}$ im vierten; in $\frac{b^4}{1.2.3.4}$ im fünften Gliede; . . .
folglich

$$a^h = 1 + (b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \ldots) h + \text{Glieder} \times h^2 + \text{Glieder} \times h^3 + \ldots\ldots$$

Wird $(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \ldots)$ durch A bezeichnet, so ist

$$a^h = 1 + Ah + \text{Glieder} \times h^2 + \ldots.$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung $y' = a^x\ a^h$, so wird sie in folgende verwandelt:

$$y' = a^x + Aa^x\ h + \text{Glieder} \times h^2 + \ldots$$

Wird hievon die ursprüngliche Gleichung $y = a^x$ abgezählt, so bleibt

$$y' - y = Aa^x\ h + \text{Glieder} \times h^2 + \ldots$$

und für das Gränzverhältniss $\frac{dy}{dx} = Aa^x$; wird hierin der Werth von y gesetzt, so ist

$$\frac{\text{D}.\ a^x}{dx} = Aa^x \ldots\ldots\ldots (19)$$

Die Constante A hängt von a ab; denn

$$A = (b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \ldots),$$

und a — 1 für b,

$$A = (a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots) \ldots (20)$$

37) Zur Bestimmung des Werthes der Constante A suche man a^x mit Hülfe des Maclaurinschen Theoremes zu entwickeln; man hat

$$y = a^x;$$

$$\frac{dy}{dx} = Aa^x;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A.da^x}{dx} = A\ \frac{Aa^x dx}{dx} = A^2a^x;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A^3a^x.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Macht man $x = o$, so erhält man

$$(y) = a^0 = 1$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = A$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = A^2$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = A^3$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (17), so ergiebt sich

$$a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \ldots$$

für $x = \frac{1}{A}$ wird diese Gleichung

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots$$

Bezeichnet man durch e den zweiten Theil dieser Gleichung, so hat man

$$a^{\frac{1}{A}} = e,$$

und hieraus

$$a = e^A.$$

Nimmt man die Logarithmen, so ist

$$\text{Log. } a = \text{Log. } e^{A} = A \text{ Log. } e;$$

daher

$$A = \frac{\text{Log. } a}{\text{Log. } e} \; \ldots\ldots\ldots \; (21)$$

Die Zahl e, deren Werth durch die Gleichung

$$e = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \ldots\ldots$$

gegeben ist, heisst die *Grundzahl*, deren sich Neper zur Berechnung seiner logarithmischen Tafeln bediente.

Da die Reihe $1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots$ hinlänglich convergirt, kann man sich mit den zehn ersten Gliedern begnügen; hierdurch erhält man beiläufig die Zahl 2,7182818 für e.

Wird durch La der Logarithme von a im neperschen Systeme bezeichnet, so hat man

$$a = (2{,}7182818)^{La},$$

oder einfacher

$$a = e^{La};$$

folglich

$$\text{Log. } a = \text{Log. } e^{La},$$

und

$$\text{Log. } a = La. \text{ Log. } e,$$

hieraus folgt

$$\frac{\text{Log. } a}{\text{Log. } e} = La;$$

hierdurch wird die Gleichung (21) auf A = La reducirt, und mithin die Gleichung (19)

$$\text{D. } a^{x} = a^{x} \, dx \, La \; (*) \; \ldots\ldots \; (22)$$

(*) Die verschiedenen Grade der Differenziale einer Exponentialgrösse sind

$$d^2 (a^{x}) = (La)^2 \, . \, a^{x} \, dx^2$$

$$d^3 (a^{x}) = (La)^3 \, . \, a^{x} \, dx^3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Der negative veränderliche Exponent ändert im Verfahren nichts. (d. Uebers.)

Von den logarithmischen Differenzialen.

38) Es sei x der Log. von y in dem Systeme, dessen Grundzahl a ist, so dass $y = a^x$; also (Art. 36) $dy = Aa^x\, dx$; hieraus folgt

$$dx = \frac{dy}{Aa^x} = \frac{dy}{\frac{\text{Log. a}}{\text{Log. e}}\, a^x} = \frac{dy \,.\, \text{Log. e}}{a^x\, \text{Log. a}};$$

da aber $a^x = y$, und $x = \text{Log. } y$, so wird die vorige Gleichung

$$\text{D. Log. } y = \frac{dy \text{ Log. e}}{y \text{ Log. a}}.$$

Im Falle man die Logarithmen im neperschen Systeme nimmt, ist

$$\frac{\text{Log. e}}{\text{Log. a}} = \frac{\text{Log. e}}{\text{Log. e}} = 1; \text{ alsdann ist}$$

$$\text{D. Log. } y = \frac{dy}{y}.$$

Von den Differenzialien der Sinusse, Cosinusse, und der andern trigonometrischen Linien, oder von den Differenzialien der Kreisfunktionen.

39) *Der Bogen ist grösser als sein Sinus, und kleiner als die Tangente.*

Um diess zu beweisen, sei AB (Fig. 2) ein Bogen, dessen Sinus, BE, dessen Tangente DA, und Bogen AB′ = Bogen AB. Betrachtet man die Sehne BB′ als eine gerade Linie, so ist BB′ kürzer als der Bogen BAB′; die Grade BE also, welche die Hälfte der Sehne BB′ ist, kürzer als der Bogen BA, welcher die Hälfte des Bogens BAB′ ist; woraus hervorgeht, dass der Sinus kleiner ist, als der Bogen.

Um zu beweisen, dass die Tangente grösser ist, als der Bogen, hat man

Inhalt △ DD′C > Inhalt des Ausschnitts BAB′C; oder wenn man für diese Räume die geometrischen Ausdrücke setzt,

$$DD. \tfrac{1}{2} AC > \text{Bog. } BAB'. \tfrac{1}{2} AC;$$

hebt man auf beiden Seiten $\frac{1}{2}$ AC auf, so bleibt

$$DD' > \text{Bog. } BAB'$$

also

$$\tfrac{1}{2} DD' > \tfrac{1}{2} \text{ Bog. } BAB'$$

oder

$$DA > \text{Bog. } BA.$$

40) Es geht aus dem Vorigen hervor, dass das Gränzverhältniss des Sinus zum Bogen die Einheit ist; denn sobald der Bogen h, durch AB bezeichnet, Null wird, fällt der Sinus mit der Tangente, und um so mehr der Sinus mit dem Bogen zwischen der Tangente und dem Sinus zusammen, folglich, im Falle des Gränzverhältnisses $\frac{\text{Sin. } h}{\text{Bog. } h}$, oder vielmehr $\frac{\text{Sin. } h}{h} = 1$.

41) Um das Differenzial des Sinus zu finden, dessen Bogen x ist, nehme man an, dass dieser Bogen um h wachse. Man weiss aus der Trigonometrie, dass

$$\text{Sin. } (x + h) = \text{Sin. } x \text{ Cos. } h + \text{Sin. } h \text{ Cos. } x \ldots (23)$$

Zieht man von dieser Funktion ihren ursprünglichen Zustand ab, und dividirt durch das Wachsthum h der Veränderlichen, so hat man

$$\frac{\text{Sin.}(x + h) - \text{Sin.} x}{h} = \frac{\text{Sin. } x \text{ Cos. } h + \text{Sin. } h \text{ Cos. } x - \text{Sin. } x}{h}.$$

Schliesst man, was durch Sin. x im zweiten Theile vervielfacht ist, in Klammern ein, so wird man finden:

$$\frac{\text{Sin.}(x + h) - \text{Sin.} x}{h} = \frac{\text{Sin.} x (\text{Cos.} h - 1)}{h} + \frac{\text{Sin.} h \text{ Cos.} x}{h} \ldots (24)$$

Wenn h Null wird, so wird auch Cos. h − 1 Null, und $\frac{\text{Cos. } h - 1}{h}$ geht über in $\frac{0}{0}$. Es ist nun erforderlich, diesem Ausdrucke eine andere Form zu geben. Aus $\text{Cos.}^2 h + \text{Sin.}^2 h = 1$ erhält man $\text{Cos.}^2 h - 1 = -\text{Sin.}^2 h$, oder $(\text{Cos. } h + 1)(\text{Cos. } h - 1) = -\text{Sin}^2 h$; woraus $\text{Cos. } h - 1 = -\frac{\text{Sin.}^2 h}{\text{Cos. } h + 1}$; substituirt man diesen Werth in die Gleichung (24), so ist

$$\frac{\text{Sin.}(x + h) - \text{Sin.}\, x}{h} = -\,\text{Sin.}\, x \,\frac{\text{Sin.}\, h}{\text{Cos.}\, h + 1} \cdot \frac{\text{Sin.}\, h}{h}$$

$$+ \text{Cos.}\, x \,\frac{\text{Sin.}\, h}{h} \ldots , \ldots (25)$$

Im Falle $h = o$, $\frac{\text{Sin.}\, h}{h} = 1$ und $\frac{\text{Sin.}\, h}{\text{Cos.}\, h + 1} = \frac{0}{2}$ $= 0$ (*); die Gleichung (25) geht dann in folgende über:

$\frac{\text{D. Sin.}\, x}{dx} = \text{Cos}, x$, und diese giebt

D. Sin. $x = \text{Cos.}\, x dx$, d. i. *das Differenzial eines Sinus ist gleich dem Cosinus desselben Winkels, vervielfacht durch das Differenzial des Bogens.*

42) In diesem ~~Bemesse~~ wurde der Radius als Längeneinheit angenommen; wollte man aber das Differenzial eines Sinus, dessen Radius a wäre, so würde man sich statt der Gleichung (23) folgender bedienen:

$$\text{Sin.}(x + h) = \frac{\text{Sin}\, x\, \text{Cos.}\, h + \text{Sin.}\, h\, \text{Cos.}\, x}{a}$$

Man dürfte daher in der obigen Formel nur die Constante a einführen, so gäbe D. Sin. $x = \frac{dx\, \text{Cos.}\, x}{a}$ das Differenzial des Sinus eines Bogens, dessen Strahl a ist.

43) Man kann zum Differenzial von Sin. x durch geometrische Betrachtungen gelangen. Denn es sei (Fig. 3) AB der Bogen x, BM der Bogen h, die Senkrechte BP wird alsdann Sin. x, und die Senkrechte MQ, Sin. $(x + h)$ sein. In dem Maasse der Bogen BM $= h$ abnimmt, in dem Maasse strebt der Winkel MBC ein rechter zu werden; folglich im Falle der Endgränze kann man den Winkel MBC als einen Rechten betrachten; alsdann wird das Dreieck MBD dem Dreiecke BCP ähnlich, weil in diesem Falle die Seiten der Dreiecke wechselseitig senkrecht sind. Hieraus folgt die Proportion

$$BC : CP = BM : MD$$

(*) Es liegt hierin kein Widerspruch, wenn man den Art. 40 mit Umsicht gebraucht.

oder

$$r : \text{Cos. } x = BM : \text{Sin. } (x + h) - \text{Sin. } x$$

mithin

$$\frac{\text{Sin. } (x + h) - \text{Sin. } x}{BM} = \frac{\text{Cos. } x}{r};$$

Geht man zum Gränzverhältniss über, und bemerkt, dass, im Falle die Sehne BM durch den Bogen BM $= h$ ersetzt werden kann, die vorige Gleichung in folgende übergehe;

$$\frac{\text{D. Sin. } x}{dx} = \frac{\text{Cos. } x}{r};$$

ist $\quad r = 1$,

$$\text{D. Sin. } x = dx \text{ Cos. } x$$

44) Um das Differenzial des Cos. x zu finden, liefert die Gleichung $\text{Sin.}^2 x + \text{Cos.}^2 x = 1$, oder vielmehr $(\text{Sin. } x)^2 + (\text{Cos. } x)^2 = 1$, nach (21) differenziirt, $2 \text{ Sin. } x \text{ D. Sin. } x + 2 \text{ Cos. } x \text{ D. Cos. } x = 0$, hieraus

$$\text{D. Cos. } x = -\frac{\text{Sin. } x \text{ D. Sin. } x}{\text{Cos, } x};$$

setzt man statt D. Sin. x seinen Werth dx Cos. x (Art. 41), und kürzt den Bruch ab, so hat man

$$\text{D. Cos. } x = - dx \text{ Sin. } x.$$

Das Differenzial des Cosinus eines Bogens wird erhalten, wenn man dem Produkte aus dem Sinus desselben Bogens in sein Differenzial das Minuszeichen vorsetzt.

45) Man erhält das Differenzial von Tang. x, wenn man erwägt, dass $\text{Tang. } x = \frac{\text{Sin. } x}{\text{Cos. } x}$; differenziirt man diese Gleichung nach Art. 19, so findet man:

$$\text{D. Tang. } x = \frac{\text{Cos. } x \text{ D. Sin. } x - \text{Sin. } x \text{ D. Cos. } x}{\text{Cos.}^2 x};$$

für D. Sin. x, D. Cos. x ihre Werthe gesetzt, ist

$$\text{D. Tang. } x = \left(\frac{\text{Cos.}^2 x + \text{Sin.}^2 x}{\text{Cos.}^2 x}\right) dx,$$

mithin, weil $\text{Cos.}^2 x + \text{Sin.}^2 x = 1$,

$$\text{D. Tang. } x = \frac{dx}{\text{Cos.}^2 x}.$$

46) Man weiss aus der Trigonometrie, dass der Radius die mittlere Proportionallinie ist zwischen der Tangente und der Cotangente, und zwischen dem Cosinus und der Secante, diess giebt

$$\text{Cot. } x = \frac{1}{\text{Tang. } x}; \text{ Sec. } x = \frac{1}{\text{Cos. } x};$$

differenziirt man die erstere dieser Gleichungen, (Art. 19,) so findet man $\text{d. Cot. } x = -\frac{\text{d. Tang. } x}{\text{Tang.}^2 x}$

$$= -\frac{dx}{\text{Cos.}^2 x \text{ Tang.}^2 x} = -\frac{dx}{\text{Sin.}^2 x};$$ denn aus der Gleichung $\frac{\text{Sin.}}{\text{Cos.}} = \text{Tang.}$ erhält man Cos. Tang. = Sin.

47) Wenn die Gleichung $\text{Sec. } x = \frac{1}{\text{Cos. } x}$ differenziirt wird, giebt sie:

$$\text{d. Sec. } x = -\frac{\text{d. Cos. } x}{\text{Cos.}^2 x} = \frac{\text{Sin. } x \, dx}{\text{Cos.}^2 x}$$

$$= \frac{\text{Sin. } x}{\text{Cos. } x} \cdot \frac{1}{\text{Cos. } x} dx = \text{Tang. } x. \text{ Sec. } x \, dx.$$

48) Auf dieselbe Art würde man das Differenzial der Cosecante bestimmen; denn $\text{Cosec. } x = \frac{1}{\text{Sin. } x}$; differenziirt man, so ist:

$$\text{d. Cosec. } x = -\frac{\text{Cos. } x \, dx}{\text{Sin.}^2 x} = -\frac{\text{Cos. } x}{\text{Sin. } x} \cdot \frac{1}{\text{Sin. } x} dx$$

$$= -\frac{1}{\text{Tang. } x} \times \text{Cosec. } x \, dx = -\text{Cot. } x \text{ Cosec. } x \, dx.$$

49) Was den Sinus versus anbelangt, so findet man, wenn man die Gleichung

$$\text{Sin. vers. } x + \text{Cos. } x = 1$$

differenziirt; es ist nämlich:

$$\text{d. Sin. vers. } x = d\,(1 - \text{Cos. } x) = \text{Sin. } x \, dx.$$

Differenziation einiger zusammengesetzten transcendenten Funktionen.

50) Die vorigen Grundsätze würden hinreichen, jeden Ausdruck differenziiren zu können, in welchem transcendente Grössen vorkommen.

Es sei $y = a^{b^x}$; hier setze man $b^x = u$ und man hat $y = a^u$; wird nach Art. 37, differenziirt, so ist:

$$\frac{dy}{du} = a^u \, La = a^{b^x} \, La,$$

$$\frac{du}{dx} = b^x \, Lb,$$

mithin, Art. 24,

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} = a^{b^x} b^x \, La \, Lb.$$

51) Es sei ferner $y = z^v$. Nimmt man die Logarithmen, so ist

$$\text{Log. } y = v \text{ Log. } z,$$

mithin

$$\text{D. Log. } y = v \text{ D. Log. } z + \text{Log. } z \, dv;$$

setzt man für die logarithmischen Differenziale ihre Werthe aus Art. 38, so erhält man:

$$\frac{dy}{y} = v \frac{dz}{z} + \text{Log. } z \, dv,$$

folglich

$$dy = y \left[v \frac{dz}{z} + \text{Log. } z \, dv \right] = z^v \left[v \frac{dz}{z} + \text{Log.} z \, dv \right].$$

Mit Hülfe dieses Differenzials findet man leicht das von $y = z^{t^u}$; denn es sei $t^u = v$, so wird die Gleichung auf folgende reducirt: $y = z^v$, $v = t^u$, welche dieselbe Form haben, deren Differenzial so eben gefunden worden ist, nämlich:

$$dy = z^v \left(v \frac{dz}{z} + \text{Log.} z dv \right),$$

$$dv = t^u \left(u \frac{dt}{t} + \text{Log.} t du \right).$$

Substituirt man diesen Werth von dv in die unmittelbar vorangehende Gleichung, so ist:

$$dy = z^{t^u}\left[t^u\frac{dz}{z} + \text{Log.}z^{t^u}\left(u\frac{dt}{t} + \text{Log.}\,t\,du\right)\right]$$

$$= z^{t^u}\,tu\left(\frac{dz}{z} + u\,\text{Log.}z\,\frac{dt}{t} + \text{Log.}z\,\text{Log.}t\,du\right).$$

Der Taylors'che Lehrsatz.

52) Ehe wir weiter gehen, wollen wir bemerken, dass ein Ausdruck wie $\frac{dy}{dx}$ in der Differenzialrechnung bezeichne, dass eine Funktion y einer oder mehrerer Veränderlichen hinsichtlich x differenziirt, und durch dx dividirt worden sei. Hätte man z. B.

$$y = ax^2 u^3 z^4,$$

so fände man den Ausdruck $\frac{dy}{dx}$, indem man u und z constant betrachtete, hinsichtlich x differenziirte, und dann durch dx dividirte; es wäre also:

$$\frac{dy}{dx} = 2\,axu^3 z^4;$$

eben so fände man auch

$$\frac{dy}{dz} = 4\,ax^2 u^3 z^3,$$

$$\frac{dy}{du} = 3\,ax^2 u^2 z^4;$$

wäre $y = a^2 + z^2$, so hätte man $\frac{dy}{dx} = 2x$.

53) *Wenn in einer Funktion y von x die Veränderliche x sich in x + h ändert, so hat man denselben Differenzial-Coëfficienten, wenn x veränderlich und h constant, als wenn h veränderlich, x aber beständig angenommen wird.*

Um diess zu beweisen, setze man $x + h = x'$ an die Stelle von x in die gegebene Gleichung $y = fx$, und man hat

$$y' = fx';$$

das Differenzial von fx' wird einer andern Funktion von x', durch $\varphi x'$ dargestellt und durch dx' vervielfacht, gleich sein, folglich $dy' = \varphi x' dx'$, oder für x' seinen Werth $x + h$ gesetzt,

$$dy' = \varphi\,(x + h)\; d\,(x + h).$$

Die Veränderung aber, welche die Annahme, als sei x veränderlich und h constant, in diesem Differenzial erzeugt, findet nur in dem Faktor $d\,(x + h)$ Statt, der in dx übergeht; man hat alsdann

$$dy' = \varphi\,(x + h)\; dx,$$

und hieraus

$$\frac{dy'}{dx} = \varphi\,(x + h) \;\ldots\ldots\; (26)$$

Lässt man hingegen x constant, und h veränderlich, so geht der Faktor $d\,(x + h)$ in dh über, und man hat:

$$dy' = \varphi\,(x + h)\; dh,$$

folglich

$$\frac{dy'}{dx} = \varphi\,(x + h) \;\ldots\ldots\; (27).$$

Setzt man diese beiden Werthe von $\varphi\,(x + h)$ einander gleich, so ergiebt sich

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dh}.$$

Wenn man z. B. in $y = ax^3$, $x + h$ für x setzte, so fände man

$$\frac{dy'}{dx} = 3a\,(x + h)^2 = \frac{dy'}{dh},$$

folglich

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dh}.$$

54) Werden die Gleichungen (26) und (27) hinsichtlich $(x + h)$ differenzirt, so geben sie auch gleiche Resultate:

$$\frac{d^2y'}{dx} = \varphi'\,(x + h)\; d\,(x + h)$$

$$\frac{d^2y'}{dh} = \varphi'\,(x + h)\; d\,(x + h).$$

Setzt man h constant in der ersten Gleichung, und x in der zweiten, so erhalten wir

$$\frac{d^2y'}{dx} = \varphi'(x+h)\,dx;\ \frac{d^2y'}{dh} = \varphi'(x+h)\,dh,$$

und hieraus

$$\frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dh^2}.$$

Durch dieselben Schlüsse überzeugt man sich, dass

$$\frac{d^3y'}{dx^3} = \frac{d^3y'}{dh^3},\ \text{und}\ \frac{d^4y'}{dx^4} = \frac{d^4y'}{dh^4},\ \text{u. s. w.}$$

55) Dieses festgesetzt, sei nun y′ eine Funktion von x + h; wird diese Funktion nach den Potenzen von h entwickelt und angenommen, dass

$$y' = y + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \dots \quad (28),$$

wo A, B, C, ... Funktionen von x sind, so hat man diese Coëfficienten zu bestimmen. Man differenziire desshalb in Hinsicht h, und dividire durch dh, so erhält man:

$$\frac{dy'}{dh} = A + 2Bh + Ch^2 + \dots\dots$$

Differenziirt man wiederum hinsichtlich x und dividirt durch dx, so ist:

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dA}{dx}h + \frac{dB}{dx}h^2 + \dots$$

Die ersten Theile dieser Gleichungen sind, vermöge Art. 53, unter sich gleich, die andern Theilen derselben Gleichungen werden ebenfalls identisch sein. Setzt man die Coëfficienten derselben Potenzen von h einander gleich, so wird man finden:

$$A = \frac{dy}{dx};\ B = \frac{dA}{2dx};\ C = \frac{dB}{3dx};\ D = \frac{dC}{4dx};\ \text{u. s. w.}$$

Substituirt man den Werth von A aus der ersten dieser Gleichungen in die zweite, so ist $B = \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$; wird dieser Werth in die dritte eingeführt, so hat man $C = \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3}$; u. s. w. Mit Hilfe dieser Werthe für A,

B, C, . . . wird die Gleichung (28) in folgende verwandelt:

$$y' = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

oder für y seinen Werth gesetzt,

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

Diese Formel heisst gewöhnlich die *Taylorsche.*

Anwendung der Taylorschen Formel bei Entwicklung verschiedener Funktionen in Reihen.

56) Es sei $y' = \sqrt{x + h}$;

man hat also $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$.

Daher

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2} x^{-1/2} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$\frac{d^2y}{dx} = -\tfrac{1}{4} x^{-3/2} = -\tfrac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{x^3}};$$

$$\frac{d^3y}{dx} = \tfrac{3}{8} \cdot x^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}};$$

Substituirt man diese Werthe in der Taylorschen Formel, so ist:

$$\sqrt{x+h} = \sqrt{x} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h}{\sqrt{x}} - \tfrac{1}{8} \cdot \frac{h^2}{\sqrt{x^3}} + \tfrac{1}{16} \cdot \frac{h^3}{\sqrt{x^5}} + \dots$$

57) Es sei $y' = \text{Sin.}\ (x + h)$; hieraus folgt, dass $y = \text{Sin.}\ x$. Man kann die Differenzial-Coëfficienten so bilden:

$$\frac{dy}{dx} = \text{Cos.}\ x; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\text{Sin.}\ x;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\text{Cos.}\ x: \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \text{Sin.}\ x;$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \text{Cos.}\ x; \dots$$

Werden diese Werthe in die Taylorsche Formel eingeführt, so findet man:

$$\text{Sin.}\,(x+h) = \text{Sin.}\,x + \text{Cos.}\,x \,.\, \frac{h}{1} - \text{Sin.}\,x \,.\, \frac{h^2}{1.2}$$

$$- \text{Cos.}\,x \,.\, \frac{h^3}{1.2.3} + \text{Sin.}\,x \,.\, \frac{h^4}{2.3.4} + \text{Cos.}\,x \,.\, \frac{h^5}{2.3.4.5}, \ldots;$$

Macht man $x = o$, alsdann $\text{Sin.}\,x = o$ $\text{Cos.}\,x = 1$, und diese Reihe geht in folgende über:

$$\text{Sin.}\,h = h - \frac{h^3}{2.3} + \frac{h^5}{2.3.4.5} - \ldots.$$

Wäre $y' = \text{Cos.}\,(x+h)$, so fände man auf dieselbe Weise:

$$\text{Cos.}\,h = 1 - \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^4}{2.3.4} - \ldots.$$

58) Letztlich wollen wir noch $\text{Log.}\,(x+h)$ entwickeln; man hat $y' = \text{Log.}\,(x+h)$; also $y = \text{Log.}\,x$;

$$dy = \text{D. Log.}\,x = \frac{dx}{x}, \text{ daher } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Man erhält nach und nach durch wiederholte Differenziation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}, \ldots.$$

Werden diese Werthe in der Taylorschen Formel substituirt, so hat man:

$$\text{Log.}\,(x+h) = \text{Log.}\,x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \ldots,$$

59) Vermittelst dieser Formel könnte man mit Leichtigkeit, durch blosse Grössenlehre das Differenzial eines Logarithmen finden, wenn sie nicht schon durch Differenziation gefunden wäre. Denn diese Formel giebt

$$\frac{\text{Log.}\,(x+h) - \text{Log.}\,x}{h} = \frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \ldots.$$

Nimmt man das Gränzverhältniss,

$$\frac{\text{D. Log.}\,x}{dx} = \frac{1}{x},$$

oder $\text{D. Log.}\,x = \dfrac{dx}{x}$.

Wüsste man das Differenzial eines Logarithmen, so

wäre es ein leichtes, das von a^x zu finden; denn macht man $y = a^x$, und nimmt die natürlichen Logarithmen, so ist:

$$Ly = La^x, \text{ oder } Ly = x\, La.$$

Differetziirt man,

$$\frac{dy}{y} = dx\, La$$

hieraus

$$dy = ydx\, La = a^x dx\, La.$$

60) Man kann den Maclaurin'schen Lehrsatz aus dem Taylor'schen auf folgende Art herleiten. Man hat, vermöge des Taylorschen Lehrsatzes:

$$f(x+h) = fx + \frac{D.\,fx}{dx}.h + \frac{d^2fx}{dx^2}.\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3fx}{dx^3}.\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

Man bezeichne durch (fx) den Werth, welchen fx annimmt, wenn man darin $x = o$, durch $\left(\frac{D.\,fx}{dx}\right)$ den Werth für $\frac{D.\,fx}{dx}$ in der nämlichen Voraussetzung; u. s. w. Die Formel von Taylor wird alsdann für $x = o$,

$$fh = (fx) + \left(\frac{D.\,fx}{dx}\right) h + \left(\frac{d^2f}{dx}\right)\frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

In dieser Gleichung kam h eben so in fh, wie x in fx, und diese Umänderung kann geschehen, weil von x keine Spur mehr vorhanden bleibt, indem wenig daran liegt, ob man diesen oder jenen Buchstaben für h substituirt. Wird diese Veränderung wirklich vorgenommen, so ist:

$$fx = (fx) + \left(\frac{dfx}{dx}\right) x + \left(\frac{d^2fx}{dx}\right)\frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

die Maclaurinsche Formel.

Von der Differenziation der Gleichungen mit zwei Veränderlichen.

61) Es sei:

$$F(x, y) = o \ldots\ldots (29),$$

eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen. Löst man diese Gleichung für y auf, so wird man $y = \varphi x$ finden. Man denke sich diesen Werth in (29) eingeführt, welche alsdann wird: $F(x, \varphi x)$, oder noch einfacher:

$$fx = o,$$

eine identische Gleichung, in welcher alle Glieder sich aufheben müssen, welchen Werth man auch dem x gibt. Wenn z. B. eine Gleichung den dritten Grad nicht übersteigt, kann man sie unter folgender Form darstellen:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = o,$$

schreibt man irgend einen Werth für x, so leistet er Genüge. Man setze also $x + h$ an die Stelle von x. und man hat wieder:

$$A(x+h)^3 + B(x+h)^2 + C(x+h) + D = o,$$

d. h. was auch x immer sei, so hat man doch für $fx = o$, $f(x + h)$; zieht man $fx = o$ von dieser Gleichung ab, so bleibt $f(x + h) - fx = o$, also auch

$$\frac{f(x + h) - fx}{h} = o.$$

Nun aber:

$$f(x + h) = fx + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots$$

hieraus ergiebt sich:

$$\frac{f(x + h) - fx}{h} = A + Bh + Ch^2 + \ldots$$

da der erste Theil dieser Gleichung $= o$ ist, so hat man $A + Bh + \ldots . = o$. Nimmt man das Gränzverhältniss, so ist $\frac{\text{D. } fx}{dx} = A = o$, folglich

$\text{D. } fx = Adx = o$, oder wenn wieder y eingeführt wird,

$$\text{D. } F(x, y) = Adx = o.$$

Diess lehrt uns, dass wenn y eine Funktion von x ist, und die Gleichung $F(x, y) = o$ differenziirt wird, man das Resultat gleich Null setzen könne, welches zugleich zur Bestimmung des Werthes des Differenzial-

Coëfficienten $\frac{dy}{dx}$ dient, wie wir im folgenden Beispiele sehen werden.

Es sei also:

$$F(x, y) = x^2 + 3ay - y^2 = 0 \ldots (30);$$

Differenzürt man nach dem vorstehenden Verfahren, und bemerkt, dass man vermöge des vorigen Beweises das Resultat gleich Null setzen müsse, so hat man:

$$2xdx + 3ady - 2ydy = 0 \ldots (31);$$

und aus dieser Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2y - 3a} \ldots (32).$$

62) Vergleicht man dieses Verfahren, vermittelst dessen wir diesen Werth erhielten, mit jenem, dessen wir uns bis jetzt bedient haben; so wird man sehen, dass wenn man nach dieser ersten Methode verfährt, der Gleichung (30) die Form $y = fx$ hätte geben, mithin sie für x auflössen müssen, um daraus mit Hilfe der Differenziation den Werth von $\frac{dy}{dx}$ zu erhalten.

Zufolge dieses Ganges würden wir finden:

$$y = \frac{3a}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2},$$

und durch Differenziation:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{\sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2}}.$$

Dieser Werth für $\frac{dy}{dx}$ erscheint uns zwar unter einer andern Form, als ihn die Gleichung (32) darbeut; wird aber in (32) der Werth für y eingeführt, so geht jene Gleichung in folgende über:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{2x}{2\sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2}} = \pm \frac{x}{\sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2}};$$

wie wir so eben gefunden haben. Die Gleichung (31) ist das erste Differenzial von (30).

Um die Gleichung zu erhalten, woraus man den Differenzial-Coëfficienten der zweiten Ordnung, nämlich $\frac{d^2y}{dx^2}$ erhält, so dividire man (31) durch dx, mache $\frac{dy}{dx} = p$, so wird diese Gleichung

$$2x + 3ap - 2yp = 0;$$

Betrachtet man y und p als Funktionen von x, so hat man, wenn differenziirt wird,

$$2dx + 3adp - 2ydp - 2pdy = 0;$$

Dividirt man durch dx, und setzt p an die Stelle von $\frac{dy}{dx}$; so ergiebt sich;

$$2 + 3a\frac{dp}{dx} - 2y\frac{dp}{dx} - 2p^2 = 0,$$

hieraus:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2p^2 - 2}{3a - 2y} \quad .\ .\ .\ .\ (33)$$

Nun aber wegen $p = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$; verwandelt sich durch Substitution dieser Werthe und durch Weglassung der Nenner die Gleichung (33) in folgende:

$$d^2y\ (3a - 2y) = 2dy^2 - 2dx^2 \quad .\ .\ .\ (34)$$

und diess ist das Differenzial der zweiten Gleichung (30).

Um das dritte Differenzial zu erhalten, mache man $\frac{dp}{dx} = q$, und die Gleichung (33) wird nach Aufhebung des Nenners $3aq - 2yq = 2p^2 - 2$; differenziirt man und betrachtet y, p, q als Funktionen von x; so wird man das dritte Differenzial finden; u. s. w.

63) Statt die Buchstaben p, q, z, . . . bei diesen Operationen zu gebrauchen, würde man zu demselben Resultate gelangen, wenn man die Gleichung (31) differenziirte, dy für das Differenzial von y, d^2y für das von dy, d^3y für das von d^2y, . . . setzte, und dx als constant annähme; auf diese Art fände man:

$$2dx^2 + 3ad^2y - 2dy^2 - 2yd^2y = o,$$

welche Gleichung dieselbe ist, wie (34).

64) Wir wollen nun den allgemeinen Ausdruck für das Differenzial der Gleichungen $f(x, y) = o$ geben. Man setze u statt $f(x, y)$, und man erhält, wenn man diese Funktion hinsichtlich x differenziirt, den Ausdruck $\frac{du}{dx}$. dx, und wenn man in Hinsicht y differenziirt, $\frac{du}{dy}$ dy;

so dass also D. $f(x, y)$, oder $du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy$;

wenn aber y als eine Funktion von x angesehen wird, se erhält man durch Differenziation

$$dy = \frac{dy}{dx} . dx;$$

wird dieser Werth eingeführt, so ist

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} dx.$$

65) Erinnert man sich des Lehrsatzes, welcher im (Art. 24) bewiesen wurde, so wird man einsehen, dass, wenn u als eine Funktion von y, und y als eine Funktion von x betrachtet wird, das Produkt $\frac{du}{dy} \frac{dy}{dx}$ dx nichts anders sei, als das Differenzial von u in Hinsicht x, welches in y enthalten ist.

66) Man hat die Ausdrücke $\frac{du}{dx}$ dx, $\frac{du}{dy}$ dy des ganzen Differenzials einer Funktion von x und y, welches durch die Gleichung

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy$$ gegeben ist, *partielle Differenziale* von u genannt.

Wäre u eine Funktion von drei Veränderlichen x, y, z, die nicht voneinander abhängen; so hätte man:

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz,$$

und die Glieder $\frac{du}{dx}$ dx, $\frac{du}{dy}$ dy, $\frac{du}{dz}$ dz heissen *partielle Differenziale* von u.

67) Wir haben (Art. 52) gesehen, dass ein Ausdruck, wie $\frac{dy}{dx}$ anzeige, die Funktion y sei hinsichtlich der Veränderlichen x differenziirt, und dann durch dx dividirt worden, so folgt, dass wenn man aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = A$,

$$1 = \frac{A}{\frac{dy}{dx}}$$

entwickelt, man nicht ohne weitern Beweis behaupten könne, es sei:

$$1 = A\,\frac{dx}{dy};$$

denn in dieser neuen Gleichung wurde die Differenziation nicht in Hinsicht x sondern hinsichtlich y verrichtet, und man weiss nicht, ob in dieser neuen Hypothese der Differenziation das nämliche Resultat zum Vorschein komme.

Um diese Schwierigkeit zu heben, hat man (Art. 24)

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Macht man in dieser Gleichung $v = x$, so erhält man:

$$1 = \frac{dx}{dy}\,\frac{dy}{dx},$$

und hieraus

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}};$$

woraus erhellet, dass die Veränderung der Differenziations-Bedingung vollkommen mit der Algebra übereinstimme.

68) Es lässt sich auch direct beweisen, dass die Gleichung

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

in der neuen Schreibart, welche das Zeichen der Division dem Bruche $\frac{dx}{dy}$ giebt, Statt findet.

Es sei:

$$\frac{y' - y}{x' - x} = A + Bh + Ch^2 + \ldots .$$

also $$\frac{x' - x}{y' - y} = \frac{1}{A + Bh + Ch^2 + \ldots .}$$

Dividirt man wirklich, oder entwickelt man nach dem Maclaurinschen Lehrsatze, so erhält man:

$$\frac{x' - x}{y' - y} = \frac{1}{A} - \frac{B}{A} h + \ldots .$$

Nimmt man die Gränze des Verhältnisses

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{A};$$

und da $\frac{dy}{dx} = A$; so folgt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Von der Methode der Tangenten.

69) Man nennt diese Methode also: weil man durch sie zu den Differenzial-Ausdrücken der Tangenten, Subtangenten, Normalen und Subnormalen gelangt.

Es sei x und y die Coordinaten eines Punktes M, auf einer Curve, Fig. 4; man vermehre die Abscisse AP $= x$ um die Grösse PP' $= h$, ziehe die Ordinate P'M', und durch die Punkte M, M' gehe die Secante M'S. Es ist gewiss, dass je mehr PP' abnimmt, desto schneller PS streben werde, mit der Subtangente PT zusam-

menzufallen, bis endlich $PP' = h$ Null werde; PT wird also die Gränze sein, wornach PS strebt.

Wir wollen nun den analytischen Ausdruck von PS suchen, um davon das Gränzverhältniss zu nehmen. Die ähnlichen Dreiecke $M'MQ$, MSP führen zur Proportion

$$M'Q : MQ = MP : PS,$$

oder $M'Q : h = y : PS$,

also $$PS = \frac{hy}{M'Q}$$

Zur Bestimmung von $M'Q$, hat man

$$M'Q = M'P' - MP;$$

nun aber

$$M'P' = y' = f(x + h);$$

folglich

$$M'P' = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \dots$$

Auf der andern Seite

$$MP = y.$$

Ziehen wir diese Gleichungen voneinander ab, so bleibt

$$M'P' - MP, \text{ oder } M'Q = \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \dots$$

Wird dieser Werth in den für PS eingeführt: so werden wir finden:

$$PS = \frac{hy}{\frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \dots}$$

und dividirt man Zähler und Nenner durch h,

$$PS = \frac{y}{\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx} \frac{h}{1.2} + \dots}$$

Für die Endgränze $h = o$ ändert sich PS in PT; diess giebt

$$PT = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}, \text{ oder (Art. 67), } PT = y \cdot \frac{dx}{dy},$$

oder vielmehr

$$PT = y' \frac{dx'}{dy'} = \textit{Subtangente}.$$

Indem durch x', y' die Coordinaten des Punktes M bezeichnet werden.

70) Wenn man aus diesem Punkte M, Fig. 5, auf MT die Senkrechte MN errichtet, so ist PN die *Subnormale*, zu deren Bestimmung diese Proportion dient:

$$PT : PM = PM : PN$$

oder

$$y' \frac{dx'}{dy'} : y' :: y' : PN,$$

also

$$PN = y' \frac{dy'}{dx'} = \textit{Subnormale}.$$

Hinsichtlich der Tangente und Normale hat man

$$MT = \sqrt{TP^2 + PM^2}$$

oder $\textit{Tangente} = \sqrt{y'^2 \frac{dx'^2}{dy'^2} + y'^2}$

$$= y' \sqrt{\frac{dx'^2}{dy'^2} + 1};$$

$$MN = \sqrt{PN^2 + PM^2}$$

oder $\textit{Normale} = \sqrt{y'^2 \frac{dy'^2}{dx'^2} + y'^2}$

$$= y' \sqrt{\frac{dy'^2}{dx'^2} + 1}.$$

71) Um die Gleichung der Tangente zu finden, seien x', y' die Coordinaten des Berührungspunktes M; die Gleichung der Geraden MT, die durch den Punkt M geht, wird so dargestellt werden können:

$$y - y' = A\,(x - x'),$$

wo A die durch $\frac{PM}{PT}$ ausgedrückte trigonometrische Tangente ist; denn man hat

$$PT : PM = 1 : \text{Tang. } PTM = \frac{PM}{PT},$$

daher Tang. MTP $= \frac{MP}{PT} = \frac{y'}{Subtang.} =$

$$= \frac{y'}{y' \frac{dx'}{dy'}} = \frac{dy'}{dx'};$$

Wird dieser Werth von A in die Gleichung für die Tangente eingeführt, so geht sie in folgende über:

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'} (x - x'),$$

die Gleichung für die Tangente. Mithin die Gleichung für die Normale

$$y - y' = - \frac{dx'}{dy'} (x - x').$$

Anwendung der vorigen Formeln auf Beispiele.

72) 1°. *Man soll die Subtangente der Parabel finden.*

Wenn die Gleichung für die Parabel $y^2 = px$ ist, so erhält man daraus durch Differenziation

$$2 \cdot ydy = pdx$$

folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}.$$

Da nun x' und y' die Coordinaten des Berührungspunktes sind; so muss man, um den Differenzial-Coëfficienten für diesen Punkt zu haben, die Grössen x, y accentuiren: da dann

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{p}{2y'};$$

dieser Werth in PT eingeführt, giebt

$$PT = \frac{2y'^2}{p},$$

und px' für y'^2 gesetzt, PT oder *Subtangente* $= 2x'$.

2°. *Man soll die Subnormale der Ellipse finden.* Wird die Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ der Ellipse, auf ihren Mittelpunkt bezogen, differenzürt, so giebt sie:

$$2b^2xdx + 2a^2ydy = o,$$

und daraus

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{b^2x'}{a^2y'};$$

setzt man diesen Werth in den für die Subnormale PN, so erhält man:

$$\text{PN oder } \textit{Subnormale} = -\frac{b^2}{a^2}x'$$

3°. *Man soll den Ausdruck der Tangente an einen Kreis gezogen, suchen.*

Wenn die Gleichung für den Zirkel $x^2 + y^2 = r^2$ differenziirt wird, so findet man für den Berührungspunkt (x', y')

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{x'}{y'}.$$

Mit Hilfe dieses Ausdrucks wird der für MT auf folgenden reducirt:

$$\textit{Tangente} = y'\sqrt{\frac{y'^2}{x'^2}+1} = y'\sqrt{\frac{x'^2+y'^2}{x'^2}}$$

$$= y'\sqrt{\frac{r^2}{x'^2}} = \frac{ry'}{x'}.$$

Von den Asymptoten der Curven.

73) Der Ausdruck AT, Fig. 6, für die Entfernung des Scheitels der Curve von dem Berührungspunkte lässt sich leicht aus der Gleichung für die Tangente herleiten; denn wenn der Scheitel der Curve A für den Anfangspunkt genommen, so wird AT die Entfernung dieses Scheitels von dem Punkte, wo die Ordinate MP Null ist.

Wenn die Gleichung der Tangente MT, $y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x')$ ist, so braucht man nur in dieser Gleichung $y = o$ zu setzen, damit der Werth für x, den man daraus herleitet, den für AT gebe. Auf diese Art erhält man:

$$\text{AT} = x' - y'\frac{dx'}{dy'},$$

diess ist die Entfernung des Anfangspunktes von dem

Punkte, wo die Tangente die Axe der x durchdringt. Um die Entfernung des Anfangspunktes von dem, wo die Axe der y von der Tangente geschnitten wird, kennen zu lernen, muss man AB berechnen; da aber AB die Ordinate y ist, welche dem $x = o$ correspondirt, so hat man in der Gleichung der Tangente unter dieser Voraussetzung

$$AB = y' - \frac{dy'}{dx'} x'.$$

Man nehme nun an, x sei unendlich geworden, so bleiben die Werthe von AT und AB, Fig. 7, immer endlich; hieraus kann man schliessen, dass die Gerade TL der Curve nur in einer unendlichen Entfernung begegnen werde; TL ist also eine *Asymptote der Curve.*

74) es sei z. B. $y^2 = mx + nx^2$; hieraus leitet man ab:

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{m + 2nx'}{2y'};$$

mithin

$$AT = x' - \frac{2y'^2}{m + 2nx'} = \frac{mx' + 2nx'^2 - 2y'^2}{m + 2nx'}$$

$$= - \frac{mx'}{m + 2nx'},$$

$$AB = y' - \frac{mx' + 2nx'^2}{2y'} = \frac{2y'^2 - mx' - 2nx'^2}{2y'};$$

setzt man für y' seinen Werth, und reducirt, so findet man

$$AT = - \frac{mx'}{m + 2nx'}; \; AB = \frac{mx'}{2\sqrt{mx' + nx'^2}};$$

werden Zähler und Nenner dieser Brüche durch x' dividirt,

$$AT = - \frac{m}{\frac{m}{x'} + 2n}; \; AB = \frac{m}{2\sqrt{\frac{m}{x'} + n}};$$

nimmt man $x = \infty$ an, so reduciren sich diese Werthe auf

$$AT = -\frac{m}{2n},\ AB = \frac{m}{2\sqrt{n}} \ldots . (35);$$

die Curve ist also so beschaffen, dass sie zwar Asymptoten hat, aber nur in jenem Falle, wenn n weder negativ noch Null ist; denn wäre n negativ, so würde AB, aus der zweiten der Gleichungen (35), imaginär werden; ist aber n negativ, so gehört die Gleichung einer Ellipse an; ist endlich n gleich Null, so entspricht die Gleichung einer Parabel, für welche die Werthe AT, AB unendlich werden, woraus folgt, dass die Parabel keiner Asymptoten empfänglich ist.

Von der Gleichung einer Ebene, welche eine krumme Fläche berührt, und von der Gleichung der Normale zu dieser Fläche.

75) Es sei f (x, y, z) = o die Gleichung einer krummen Fläche, und Ax + By + Cz + D = o die einer Ebene. Wenn x', y', z' die Coordinaten des Berührungspunktes M sind, so müssen sie der Gleichung der Ebene Genüge leisten, und man hat alsdann

$$Ax' + By' + Cz' + D = o.$$

Eliminirt man D aus dieser und der vorhergehenden Gleichung, so wird man für die Gleichung der Ebene, die durch den Punkt x', y', z' gehen soll, finden

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = o \ldots (36)$$

Wird durch den Berührungspunkt x', y', z' eine Ebene, parallel zu der von (x, z) gelegt, so ist der Durchschnitt dieser Ebene mit der krummen Fläche eine Curve MC, Fig. 8, und mit der berührenden Ebene eine Gerade ML, die zu der Curve MC eine Tangente sein muss, denn sonst schnitte die berührende Ebene die krumme Fläche.

Die Gleichung der Geraden ML lässt sich aus der Gleichung (36) herleiten; denn wenn diese Gerade ML der Durchschnitt der berührenden und der zu (x, z) parallelen Ebene ist, so sind die Werthe für y in allen Punkten gleich, und weil der Punkt M in der Geraden liegt, hat man y = y' oder y — y' = o, hiedurch geht die Gleichung (36) in folgende über:

$$A(x - x') + C(z - z') = o.$$

Diese Gleichung drückt mithin die Verbindung zwischen den Coordinaten z und x irgend eines Punktes M in der Geraden ML aus, ist folglich die Gleichung dieser Geraden, die auch so geschrieben werden kann:

$$z - z' = -\frac{A}{C}(x - x') \quad \ldots . \quad (37).$$

Auf der andern Seite ergiebt sich ebenfalls die Gleichung der Curve MC, wenn y in der Gleichung für die krumme Fläche $f(x, y, z) = o$ constant betrachtet wird.

Will man nun die Bedingung ausdrücken, dass die Gerade ML eine Tangente der Curve MC sei, so muss, Art. 71, der Coëfficient von $x - x'$ der Gleichung (37) dem Werthe von $\frac{dz'}{dx'}$, aus der Gleichung der Curve MC entwickelt, gleich sein. Nun aber ist die Gleichung dieser Curve zugleich die für die Fläche in welcher man y constant betrachtete, es ist also hinreichend, die Gleichung dieser Fläche zu differenziiren, und daraus $\frac{dz}{dx}$ herzuleiten; denn nach Art. 52, deutet die Bezeichnung $\frac{dz}{dx}$ an, dass in der Differenziation y als constant behandelt wurde.

Nach vollendetem Geschäfte, und wenn z′, x′ accentuirt werden, erhält man als Bedingung, dass ML an MC eine Tangente sei,

$$-\frac{A}{C} = \frac{dz'}{dx'} \text{ oder vielmehr } A = -C\frac{dz'}{dx'} \ldots (38).$$

Legt man nun durch den Punkt M eine Ebene zu der (z, y) parallel, so ist der Durchschnitt dieser Ebene mit der Fläche eine Curve MD, und mit der berührenden Ebene eine Gerade MN.

Man könnte wie vorhin beweisen, dass die Gerade MN eine Tangente der Curve des Schnittes MD sein,

und weil für alle Punkte dieser Geraden die Abscissen gleich sind, man $x - x' = o$ haben müsse, wodurch die Gleichung (36) auf folgende reducirt wird:

$$B(y - y') + C(z - z') = o,$$

hieraus leitet man ab:

$$z - z' = -\frac{B}{C}(y - y').$$

Da diess die Gleichung der Geraden MN ist, so wird man die Bedingung erhalten, dass sie eine Tangente der Curve MD sei, wenn der Coëfficient von $y - y'$ dem Differenzial-Coëfficienten $\frac{dz'}{dy'}$ aus der Gleichung der krummen Fläche gleich gesetzt wird, wodurch man erhält:

$$-\frac{B}{C} = \frac{dz'}{dy'},$$

folglich

$$B = -C\frac{dz'}{dx'} \; \ldots\ldots \; (39).$$

Werden in (36) die Werthe für A und B aus (33) und (39) eingeführt, so entsteht:

$$-C\frac{dz'}{dx'}(x - x') - C\frac{dz'}{dx'}(y - y') + C(z - z') = o,$$

hierazs leitet man für die Gleichung der im Punkte x', y', z', berührenden Ebene ab:

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dx'}(y - y') \ldots (40).$$

76) *Man suche z. B. die Gleichung einer die Kugel berührenden Ebene.* Sind die Coordinaten des Mittelpunktes a, b, c; so ist die Gleichung der Kugel:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2;$$

durch Differenziation findet man,

$$(x - a)\,dx + (y - b)\,dy + (z - c)\,dz = o,$$

und hieraus nach der in (Art. 52) angenommenen Bezeichnung:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a - x}{z - c}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{b - y}{z - c}.$$

Die Gleichung einer die Kugel im Punkte x′, y′, z′ berührenden Ebene wird also sein:

$$z - z' = \frac{a - x'}{z' - c}(x - x') + \frac{b - y'}{z' - c}(y - y').$$

77) Gienge diese Ebene durch den Endpunkt des verticalen Durchmessers, so hätte man

$$x' = a,\ y' = b,\ z' = c + r;$$

hierdurch reducirte sich die Gleichung der berührenden Ebene auf $z = c + r$, welches die Gleichung einer zu (x, y) parallelen Ebene ist.

78) Die Gleichungen der Normale im Punkte (x′, y′, z′) lassen sich leicht aus der Gleichung der berührenden Ebene ableiten. Man weiss aus der analytischen Geometrie, dass, wenn die Gleichungen gegeben sind,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \ldots\ldots (41)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

wo die erstere für eine Ebene, die beiden andern für eine Gerade sind, die nothwendigen Bedingnisse, dass diese Gerade auf der Ebene senkrecht aufstehe, folgende Gleichungen seien:

$$A = aC,\ B = bC.$$

Hat man in der Gleichung (40) für die Ebene alle Glieder auf eine Seite des Gleichheitszeichens gebracht, und mit (41) verglichen, so findet man, wenn die Coëfficienten von x, von y, und von z unter sich gleich gesetzt werden,

$$A = -\frac{dz'}{dx'};\ B = -\frac{dz'}{dy'};\ C = 1;$$

also

$$a = -\frac{dz'}{dx'},\ b = -\frac{dz'}{dy'};$$

und wenn diese Werthe in (42) eingeführt werden,

$$x = -\frac{dz'}{dx'}z + \alpha;\ y = -\frac{dz'}{dy'}z + \beta.$$

Da der Punkt x′, y′, z′ diesen Gleichungen, welche einem Punkte der Geraden angehören, Genüge leisten muss, hat man auch:

$$x' = -\frac{dz'}{dx'} z' + \alpha;\ y' = -\frac{dz'}{dy'} z' + \beta;$$

wird α und β aus diesen Gleichungen eliminirt, so findet man für die Gleichungen der Normale im Punkte (x′, y′, z′)

$$x - x' = -\frac{dz'}{dx'}(z - z');\ y - y' = -\frac{dz'}{dy'}(z - z').$$

Von den Funktionen, welche für einen Werth der Veränderlichen $\frac{0}{0}$ werden.

79) Sobald ein Bruch wie $\frac{Fx}{\varphi x}$, $\frac{0}{0}$ wird, wenn man darin für x einen Werth, durch a bezeichnet, substituirt; so ist diess ein Zeichen, dass die beiden Glieder des Bruchs x — a oder überhaupt, $(x - a)^m$ als gemeinschaftlichen Faktor haben; könnte man ihn aufheben, so hätte man den wahren Werth des Bruches.

Man nehme nun an, dass Fx den Faktor x — a, m mal enthalte, und φx denselben Faktor n mal (wobei jedoch, nöthigenfalls m und n gleich der Einheit oder Null angenommen werden können); man kann alsdann auch schreiben

$$Fx = P\,(x - a)^m;\ \varphi x = Q\,(x - a)^n,$$

also

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{P}{Q}\,(x - a)^{m - n} \ldots\ldots (43).$$

Durch Differenziation findet man:

$$\text{D.}\,\frac{Fx}{dx} = \frac{dP}{dx}\,(x - a)^m + mP\,(x - a)^{m - 1}.$$

Man bemerke, dass D. $\frac{Fx}{dx}$ aus zwei Theilen besteht, wovon der eine eine Potenz von x — a enthält, deren Exponent um eins geringer ist, als in der Funktion selbst. Aus demselben Grunde findet man, wenn man

den Differenzial-Coëfficienten nimmt, ein Glied, worin man $(x - a)^m$ antrifft, ein anderes von der Form $(x - a)^{m-1}$, ein drittes von der Form $(x - a)^{m-2}$; dieses letzte Glied wird $m(m-1)P(x-a)^{m-1}$ sein. Fährt man auf diese Art fort, so wird man sehen, dass durch jede neue Differenziation Glieder mit den nämlichen Potenzen von $(x - a)$ behaftet erzeugt werden, wie die, welche in der Funktion enthalten sind, nebst einem Gliede, worin die Potenz von $x - a$ um eine Einheit vermindert vorkömmt. Nimmt man nun die Differenzial-Coëfficienten der Ordnung nach, das Glied, worin die minder hohe Potenz von $x - a$ erscheint, so wird sein:

bei der ersten Differenziation $mP(x-a)^{m-1}$,

bei der zweiten $m(m-1)P(x-a)^{m-2}$,

bei der dritten $m(m-1)(m-2)P(x-a)^{m-3}$,

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

bei der nten $m(m-1)\ldots\ldots P(x-a)^{m-n}$,

so dass der Differenzial-Coëfficient der rten Ordnung von Fx folgende Form haben wird:

$$\frac{d^r Fx}{dx^r} = X(x-a)^m + X'(x-a)^{m-1} + X''(x-a)^{m-2} + \ldots + m(m-1)(m-2)\ldots P(x-a)^{m-r}.$$

Was von Fx gesagt ist, kann auch auf φx angewandt werden; man findet zum Differenzial der Ordnung r der gegebenen Funktion folgendes Resultat:

$$\frac{\dfrac{d^r \cdot Fx}{dx^r}}{\dfrac{d^r \cdot \varphi x}{dx^r}} = \frac{X(x-a)^m + X'(x-a)^{m-1} + \ldots + m(m-1)\ldots P(x-a)^{m-r}}{Z(x-a)^n + Z'(x-a)^{n-1} + \ldots + n(n-1)\ldots Q(x-a)^{n-r}} \quad \ldots\ldots (44).$$

80) Dieses festgesetzt, wollen wir nun drei Fälle betrachten, nämlich:

$1^o.\ m = n;\quad 2^o.\ m > n;\quad 3^o.\ m < n.$

Wenn $m = n$, und die Anzahl r der vorgenommenen Differenziationen m gleich ist; so wird jedes der Binomien $(x - a)^{m-r}$, $(x - a)^{n-r}$ auf $(x - a)^o$, d. i. auf die Einheit reducirt. Hinsichtlich der andern Binomien $(x - a)^m$, $(x - a)^{m-1} \ldots (x - a)^n$, $(x - a)^{n-1}$, ... gehen sie bei der Annahme $x = a$ in Null über; alle Glieder also ausser dem letzten des Zählers und dem letzten des Nenners verschwinden, und die Gleichung (44) wird

$$\frac{\frac{d^m \cdot Fx}{dx^m}}{\frac{d^m \cdot \varphi x}{dx^m}} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots P}{n(n-1)(n-2)\ldots Q} = \frac{P}{Q} = \frac{Fx}{\varphi x}.$$

Im zweiten Falle, wenn $m > n$ und die Anzahl der r vorgenommenen Differenziationen gleich n ist, so wird das Binomium $(x - a)^{n-r}$ auf die Einheit reducirt, indem sein Exponent $n - r$ Null ist. Die Exponenten $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$, ... $m - 1$, $m - 2$, der andern Binomien, welche grösser, als $n - r$, sind positiv, mithin gehen alle diese Binomien in Null über, wenn $x = a$ gesetzt wird; alle Glieder verschwinden also unter dieser Voraussetzung, ausser jenen, worin $(x - a)^{n-r}$ sich findet, und die Gleichung (44) ändert sich in folgende um:

$$\frac{\frac{d^n \cdot Fx}{dx^n}}{\frac{d^n \varphi x}{dx^n}} = \frac{o}{n(n-1)\ldots Q(x-a)^{n-r}} = \frac{o}{n(n-1)\ldots Q} = o;$$

dieser Werth zeigt an, dass für $m > n$ die Gleichung (43) Null wird. Hat man endlich $m < n$, und die Anzahl r der verrichteten Differenziationen gleich m, so

verschwinden alle Glieder, ausser $m(m-1)\ldots P(x-a)^0$, und es bleibt noch:

$$\frac{\frac{d^m \cdot Fx}{dx^m}}{\frac{d^m \cdot \varphi x}{dx^m}} = \frac{m(m-1)\ldots P}{o} = \infty;$$

dieser Werth zeigt nun an, dass m grösser als n sei, da dann der zweite Theil der Gleichung (43) unendlich wird.

81) Hieraus leitet man folgende Regel ab: *Wenn man den wahren Werth eines Bruches* $\frac{Fx}{\varphi x}$, *welcher durch einen der Veränderlichen beigelegten Werth* $\frac{o}{o}$ *wird, zu bestimmen hat; so muss man die beiden Glieder des Bruches einzeln differenziiren, und dann untersuchen, ob die Resultate* $\frac{D.Fx}{dx}$, $\frac{D.\varphi x}{dx}$, *Null werden durch den der Veränderlichen beigelegten Werth. Findet dieses Statt, so nehme man die Differenzial-Coëfficienten der Ausdrücke* $\frac{D.Fx}{dx}$, $\frac{D.\varphi x}{dx}$, *und sehe, ob bei derselben Hypothese der Veränderlichen ein jeder der Differenzial-Coëfficienten auf Null reducirt werde. Findet man bei der Fortsetzung dieser Bewahrheitung nach einer gewissen Anzahl verrichteter Differenziationen, dass die beiden Glieder des Bruches durch einen der Veränderlichen gegebenen Werth nicht verschwinden, so ist dieser letzte Bruch der wahre Werth von* $\frac{Fx}{\varphi x}$; *wird aber der Zähler durch den Werth von x allein Null, so wird* $\frac{Fx}{\varphi x}$ *Null, und verschwindet*

letztlich nur der Nenner für den Werth von x, so wird der Ausdruck $\frac{Fx}{\varphi x}$ *unendlich.*

82) Es sei z. B.

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{x^3 - b^3}{4(x-b)};$$

dieser Bruch wird $\frac{o}{o}$ für $x = b$; will man seinen wahren Werth haben, so muss man seine beiden Glieder differenziiren, wodurch man erhält $\frac{3x^2}{4}$, und da die beiden Glieder des Bruches nicht Null werden für $x = b$, so ist $\frac{3b^2}{4}$ der wahre Werth des gegebenen Bruchs für $x = b$.

83) Es sei ferner

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3};$$

dieser Bruch wird $\frac{o}{o}$, wenn $x = 1$; um nun seinen wahren Werth zu finden, differenziire man seine beiden Glieder, und man findet

$$\frac{3x^3 - 3}{4x^3 - 12x + 8}.$$

Da die beiden Glieder dieses Bruchs noch immer für $x = 1$ Null sind, wiederhole man die Differenziation, und man erhält

$$\frac{6x}{12x^2 - 12};$$

hier wird der Nenner allein Null, wenn $x = 1$, mithin ist der Bruch für $x = 1$, unendlich.

84) Macht man von derselben Regel Gebrauch bei dem Bruche

$$\frac{a^x - b^x}{x},$$

der $\frac{o}{o}$ wird, wenn $x = o$; so fände man durch Differenziation der beiden Glieder dieses Bruches

$$\frac{a^x \text{ Log. } a - b^x \text{ Log. } b}{1},$$

in welchem Ausdrucke der Zähler nicht Null wird, wenn $x = o$; es ist mithin Log. a — Log. b der Werth, welchen der gegebene Bruch annimmt, wenn $x = o$ gesetzt wird.

Es ist ganz klar, dass der gemeinschaftliche Faktor dieses Bruches $x - o$, d. i. x sei. Wie soll man aber diesen Faktor in $a^x - b^x$ erkennen? Um zu diesem Zwecke zu gelangen, bemerken wir, dass nach Art. 33

$$a^x = 1 + A\frac{x}{1} + \frac{A^2 . x^2}{1 . 2} + \ldots$$

$$b^x = 1 + B\frac{x}{1} + \frac{B^2 . x^2}{1 . 2}$$

mithin, wenn man abzieht,

$$a^x - b^x = (A - B)\, x + \frac{(A^2 - B^2)}{1 . 2}\, x^2 + \ldots .$$

woraus man sieht, dass x der gemeinschaftliche Faktor sei von $a^x - b^x$.

85) Indess muss man nicht annehmen, dass die so eben gegebene Regel für alle Fälle hinreiche. Der vorhergehende Beweis gründet sich darauf, dass die Exponenten m und n ganze Zahlen seien; wären sie Brüche, so könnte man durch wiederholte Differenziation kein Glied finden, worin sich $x - a$ auf der Potenz o befände, mithin könnte man nach dem vorher angezeigten Verfahren den Bruch von seinem gemeinschaftlichen Faktor nicht befreien.

Grösserer Allgemeinheit wegen sei der Ausdruck:

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{P(x - a)^{\alpha} + Q'(x - a)^{\beta} + R(x - a)^{\gamma} + \ldots}{P'(x - a)^{\alpha'} + Q'(x - a)^{\beta'} + R'(x - a)^{\gamma'} + \ldots},$$

worin $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ wie auch $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ positiv

und zunehmend sind. Da dieser Ausdruck auf $\frac{o}{o}$ reducirt wird, wenn x = o, so kann man anstatt x in a, auch x in x + h verwandeln, jedoch mit dem Vorbehalt, nach geschener Reduction h = o zu machen; die Hypothese wird alsdann dieselbe sein, als wenn man unmittelbar x = a gemacht hätte, und man hat:

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{Ph^{\alpha} + Qh^{\beta} + Rh^{\gamma} + \ldots}{P'h^{\alpha'} + Q'h^{\beta'} + R'h^{\gamma'} + \ldots} \ldots (45).$$

Für α und α', welche die kleinsten unter den Exponenten in beiden Reihen sind, können drei Fälle eintreten, nämlich:

$$1^{o}.\ \alpha > \alpha';\quad 2^{o}.\ \alpha = \alpha';\quad 3^{o}.\ \alpha < \alpha'.$$

Dividirt man im ersten Falle die beiden Glieder des Bruches (45) durch $h^{\alpha'}$ so erhält man;

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{Ph^{\alpha-\alpha'} + Qh^{\beta-\alpha'} + Rh^{\gamma-\alpha'} + \ldots}{P' \quad + Q'h^{\beta'-\alpha'} + Rh^{\gamma'-\alpha'} + \ldots} \ldots (46);$$

Kraft dessen, dass $\alpha > \alpha'$, ist $\alpha - \alpha'$ positiv, und um so mehr $\beta - \alpha'$, $\gamma - \alpha'$, ... weil α, β, γ, ... immer wachsen; auch $\beta' - \alpha'$, $\gamma' - \alpha'$, ... werden positive Grössen sein, weil nicht allein α', β', γ', ... sondern auch $\alpha' < \beta'$, $\alpha' < \gamma'$, ... zunehmen. Setzt man nun h = o, so verschwinden alle Glieder, zur Rechten des Gleichheitszeichens in (46), ausser P', diese Gleichung wird daher auf folgende reducirt:

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{o}{P'} = o.$$

Im zweiten Falle, wo $\alpha = \alpha'$, geht das Glied $Ph^{\alpha-\alpha'}$ in $Ph^{o} = P$ über; bei Betrachtung der Gleichung (46) erfährt man, dass wenn x = o, $\frac{Fx}{\varphi x}$ auf $\frac{P}{P'}$ reducirt werde.

Im dritten Falle endlich, wo $\alpha < \alpha'$, dividire man durch h^{α}, und bringe (45) unter folgende Form:

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{P + Qh^{\beta - \alpha} + Rh^{\gamma - \alpha} + \ldots}{P'h^{\alpha' - \alpha} + Q'h^{\beta' - \alpha} + R'h^{\gamma' - \alpha} + \ldots};$$

woraus ersichtlich ist, dass man für $h = o$ folgenden Werth erhalte, nämlich:

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{P}{o} = \infty.$$

86) Der gegebene Bruch sei:

$$\frac{(x^2 - 3ax + 2a^2)^{2/3}}{(x^3 - a^3)^{1/2}},$$

welcher in $\frac{o}{o}$ übergeht, wenn $x = a$; setzt man hier $a + h$ für x, so ist:

$$\frac{(h^2 - ah)^{2/3}}{(3a^2h + 2ah^2 + h^3)^{1/2}} = \frac{(h - a)^{2/3}\, h^{2/3}}{(3a^2 + 3ah + h^2)^{1/2}\, h^{1/2}},$$

$$= \frac{(h - a)^{2/3}\, h^{2/3 - 1/2}}{(3a^2 + 3ah + h^2)^{1/2}} = \frac{(h - a)^{2/3}\, h^{1/6}}{(3a^2 + 3ah + h^2)^{1/2}};$$

macht man $h = o$, so erhält man:

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{o}{(3a^2)^{1/2}} = o.$$

87) Würden durch einen Werth von x die Glieder des Bruches $\frac{Fx}{\varphi x}$ unendlich, und man dividirte sie durch $Fx \times \varphi x$, so erhielte man:

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{\frac{1}{\varphi x}}{\frac{1}{Fx}} = \frac{o}{o}.$$

88) Hätte man endlich ein Produkt MN, in welchem durch die Annahme von $x = o$ der eine Faktor Null, der andere unendlich würde; so sei M der Faktor, welcher durch den Werth von x Null, und zugleich N unend-

lich wird; dieses Produkt könnte auch so geschrieben werden:

$$MN = \frac{M}{\frac{1}{N}};$$

und da alsdann $\frac{1}{N}$ Null wäre, so würde der Ausdruck $\frac{M}{\frac{1}{N}}$ auf $\frac{o}{o}$ reducirt werden.

Vom Grössten und Kleinsten in den Funktionen einer einzigen Veränderlichen.

89) Man kann in der Taylor'schen Reihe dem Zuwachse h einen solchen Werth beilegen, dass eines ihrer Glieder grösser werde, als die Summe aller nachfolgenden. Will man z. B., dass in der Reihe

$$y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \ldots$$

das Glied $\frac{dy}{dx}h$ grösser werde, als die Summe aller folgenden Glieder, so schreibe man die Reihe von diesem Gliede auf folgende Art:

$$\left(\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^2}{2.3} + \ldots\right) h \ldots (47).$$

Macht man h = o, so verschwindet der Theil

$$\frac{d^2y}{dx^2} \frac{h}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^2}{2.3} + \ldots,$$

und man erkennt leicht, dass man ihn so klein, als man will, annehmen könne, wenn h dem Null ganz nahe kömmt, und dass $\frac{dy}{dx}$, welches von h unabhängig ist, grösser sei, als jenes Aggregat.

Man bezeichne durch Z, was in diesem Falle $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h}{2} + \ldots$ wird, und die Reihe (47) lässt sich auf

$\left(\frac{dy}{dx} + Z\right)$ h reduciren; da alsdann $\frac{dy}{dx} > Z$, oder $\frac{dy}{dx}h > hZ$, indem nämlich durch h vervielfacht wird, so folgt daraus, dass das Glied $\frac{dy}{dx}h$ grösser ist, als die Summe aller folgenden. Eben so würde man für jedes andere Glied hinsichtlich der darauf folgenden beweisen.

90) Es sei $y = \varphi x$ eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen, welche man immer als diejenige einer Curve betrachten kann, deren Ordinaten die verschiedenen Werthe der Funktion y sind. Man sagt, die Funktion habe ihr *Kleinstes* erreicht, wenn sie nach einer successiven Abnahme auf dem Punkte ist wieder zu wachsen.

Es sei z. B. die Curve MBN, Fig. 9, deren Gleichung $y = b + cx^2$; man sieht, dass die Ordinaten mp, m′p′, . . . beständig abnehmen. bis zum Punkte B, von wo an aber die Ordinaten qn, q′n′, ... immer wachsen. Die Ordinate AB ist also ein *Minimum* der Funktion y.

91) Man sagt auf gleiche Weise, eine Funktion sei ein Grösstes geworden, wenn sie durch allmähliges Zunehmen zu dem Punkte gelangt ist, nach dessen Ueberschreitung sie anfängt abzunehmen.

Die Curve CDE, Fig. 10, deren Gleichung $y = b - cx^2$, liefert hievon im Punkte D ein Beispiel, weil die Ordinaten, welche der AD unmittelbar vorangehen, oder folgen, kleiner als AD sind; die Ordinate AD ist also ein *Maximum*.

92) Es giebt Curven, welche kein Grösstes, und wiederum andere, welche kein Kleinstes enthalten; in einigen findet sich beides zugleich, andere wiederum sind für keines von beiden empfänglich.

Man sieht, dass z. B. die Curve MBN, Fig. 9, deren Gleichung $y = b + cx^2$ kein Grösstes haben kann, weil

nach der Natur ihrer Gleichung die Ordinaten unaufhörlich wachsen.

Der Kreis CBD, Fig. 11, dessen Gleichung

$$a^2 = (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2,$$

hat ein Maximum oder Minimum; jenes ist PD, dieses BP.

93) Wenn eine Funktion y einer Veränderlichen x, ein Grösstes oder ein Kleinstes hat, so wäre entweder dieses Maximum oder dieses Minimum bestimmt, wenn man die dem y correspondirende Abscisse kännte; wäre z. B in einer Curve, deren Gleichung $y = \varphi x$, der Werth a der Abscisse x bekannt, die dem Maximum oder Minimum entspricht, so wäre es hinreichend, $x = a$ in der Gleichung $y = \varphi x$ zu machen, um den Werth von y zu bestimmen, der das verlangte Maximum oder Minimum ist.

94) Es sei also $y = fx$ eine Ordinate PM, Fig. 12, die ihren grössten Werth erreicht hat, erhält die Abscisse AP einen Zuwachs h, durch PP′ vorgestellt, und man trägt auch h von P nach P″, so hat man für die Bedingungen, unter welchen PM ein *Maximum* ist,

$$P'M' < PM; \quad P''M'' < PM;$$

oder

$$f(x + h) < fx, \quad f(x - h) < fx.$$

Ist hingegen PM, Fig. 13, ein *Kleinstes*, und es wird der Werth von x, der dem *Minimum* entspricht, durch AB bezeichnet, und $PP' = PP'' = h$ genommen, so hat man als Bedingungen des *Kleinsten:*

$$P'M' > PM; \quad P''M'' > PM;$$

oder

$$f(x + h) > fx; \quad f(x - h) > fx.$$

Sind also $f(x + h)$, $f(x - h)$ zugleich kleiner als fx, so findet ein *Maximum*, und sind sie zugleich grösser als fx, ein *Minimum* Statt; und ist eine dieser Funktionen grösser, die andere kleiner als fx, so giebt es weder ein *Maximum* noch ein *Minimum.*

95) Untersuchen wir nun, in welchen Fällen diese Bedingnisse erfüllt werden können. Zu diesem Ende hat man nach dem Taylors'chen Lehrsatze:

$$f(x+h)=y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2}+\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots(48);$$

und schreibt man — h für + h in dieser Formel, so ist:

$$f(x-h)=y-\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2}-\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots(49).$$

Damit $y = fx$ *Grösstes* oder *Kleinstes* werde, so müssen nothwendigerweise diese beiden Reihen grösser, oder beide kleiner als y sein; da aber diess nicht eher geschehen kann, als bis $\frac{dy}{dx}$ Null ist; so lege man dem h einen sehr kleinen Werth bei; man wird immer beweisen können, dass $\frac{dy}{dx}h$ die algebraische Summe aller auf jenes folgenden Glieder übersteige, in welchem Falle das Zeichen von $\frac{dy}{dx}h$ mit dem von $\frac{dy}{dx}h$ nebst den darauf folgenden Gliedern dasselbe sein wird; ist also $\frac{dy}{dx}h$ in einer der Reihen (48) oder (49) positiv, so wird diese Reihe grösser als y, und kleiner als y, wenn $\frac{dy}{dx}h$ negativ ist. Da nun das Zeichen von $\frac{dy}{dx}h$ in beiden obigen Reihen entgegengesetzt ist, so muss es, wenn es in der einen positiv erscheint, in der andern negativ sein. Hieraus folgt, dass eine von den Grössen $f(x+h)$ und $f(x-h)$ grösser, die andere kleiner als fx sein muss.

Wenn $\frac{dy}{dx}h$ nicht Null ist, so kann weder ein Grösstes noch ein Kleinstes Statt finden; wenn aber $\frac{dy}{dx}=0$, dann werden die Reihen (48) und (49) auf folgende zurückgebracht:

$$f(x+h) = y + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{2.3} + \ldots$$

$$f(x-h) = y + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h}{2} - \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{2.3} + \ldots$$

Hängt das Zeichen der Glieder, welche auf y folgen, von $\frac{d^2y}{dx^2}$ ab, so nimmt man h so klein, dass dieses Glied die Summe aller darauf folgenden übersteigt, und da $\frac{d^2y}{dx^2}$ in beiden Reihen dasselbe Zeichen hat, so folgt, dass wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, die beiden Funktionen $f(x+h)$ und $f(x-h)$ grösser als fx, mithin für diesen Fall fx ein *Kleinstes* sein werde. Eben so lässt sich schliesen, dass fx ein *Grösstes* sein werde, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist.

96) Um diese Lehre zu ergänzen, bemerken wir, dass ausser $\frac{dy}{dx} = o$ man auch $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ haben könne; in diesem Falle findet weder Maximum noch Minimum Statt, wenn nicht $\frac{d^3y}{dx^3} = o$, da dann das Zeichen der Grössen, welche auf y folgen, von $\frac{d^4y}{dx^4}$ abhängt, wenn man h sehr klein annimmt; es lässt sich auch zeigen, dass wenn $\frac{d^4y}{dx^4}$ positiv, fx ein Kleinstes, und wenn $\frac{d^4y}{dx^4}$ negativ, fx ein Grösstes sei; u. s. w.

Ist überhaupt der erste Coëfficient, der nicht verschwindet, der Ordnung nach durch eine gerade Zahl bestimmt, so hat man ein *Minimum*, wenn er positiv, und ein *Maximum*, wenn er negativ ist.

97) Als erstes Beispiel diene die Funktion $a - bx + x^2$. Man hat also:

$$y = a - bx + x^2;$$

differenziirt und dividirt man hierauf durch dx, so ist:

$$\frac{dy}{dx} = -b + 2x; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2.$$

Dieser positive Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ beweiset, dass die Funktion ein Minimum enthalte. Um die Abscisse zu bestimmen, welche diesem Minimum entspricht, setze man den Werth von $\frac{dy}{dx} = o$, woraus $x = \frac{b}{2}$; substituirt man diesen Werth von x in den von y, so erhält man $y = a - \frac{b^2}{4}$ für das gesuchte Minimum.

98) Es sei ferner die Funktion $a^4 + b^3x - c^2x^2$; differenziirt man die Gleichung $y = a^4 + b^3x - c^2x^2$, und dividirt sie durch dx, so findet man:

$$\frac{dy}{dx} = b^3 - 2c^2x; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -2c^2.$$

Aus dem negativen Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$ ersieht man, dass es für diese Funktion ein *Grösstes* gebe. Die Gleichung $b^3 - 2c^2x = o$ liefert $x = \frac{b^3}{2c^2}$ für die Abscisse, welche diesem Grössten entspricht. Führt man den Werth von x in den von y ein, so ist:

$$y = a^4 + \frac{b^2}{4c^2}.$$

99) Es sei letztlich die Gleichung

$$y = 3a^2x^3 - b^4x + c^5;$$

wir erhalten durch das vorige Verfahren:

$$\frac{dy}{dx} = 9a^2x^2 - b^4; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 18a^2x;$$

setzt man den Werth von $\frac{dy}{dx}$ gleich Null, so hat man:

$$9a^2x^2 - b^4 = o, \text{ hieraus } x = \pm \frac{b^2}{3a}.$$

Werden diese Werthe von x nach und nach in den von $\frac{d^2y}{dx^2}$ eingeführt, so erfährt man, dass in der Funktion ein *Kleinstes* und ein *Grösstes* vorhanden sei. Das Kleinste entspricht der Abscisse $x = + \frac{b^2}{3a}$, und das Grösste der Abscisse $x = - \frac{b^2}{3a}$. Setzt man diese Werthe in den für y, so wird $y = c^5 - \frac{2b^6}{9a}$ für das *Kleinste*, und $y = c^5 + \frac{2b^6}{9a}$ für das *Grösste.*

Anwendung der Theorie des Grössten und Kleinsten auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

100) *Eine Zahl so in zwei Theile zu theilen, dass das Produkt des einen in den andern Theil ein Grösstes sei.*

Es sei a die Zahl, und x ein Theil, so ist der andere $a - x$; es ist also $x(a - x)$ die Grösse, deren Grösstes gesucht werden soll. Wird die Gleichung $y = x(a - x) = xa - x^2$ differenziirt und nachher durch dx dividirt, so ist:

$$\frac{dy}{dx} = a - 2x; \frac{d^2y}{dx^2} = -2.$$

Der Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ zeigt, dass die Funktion wirklich ein Grösstes enthalte. Hätte man diesen Coëfficienten mit entgegengesetztem Zeichen gefunden, so wäre die Aufgabe unmöglich. Macht man den Werth von $\frac{dy}{dx}$ gleich o, so wird man finden $x = \frac{1}{2}a$, woraus ersichtlich ist, dass die Zahl a in zwei gleiche Theile getheilt werden müsse, damit das Produkt ein Maximum sei.

Aufgabe II.

101) *Unter allen Cylindern, welche in einen geraden Kegel beschrieben sind, denjenigen zu bestimmen, welcher das grösste Volumen hat.*

Es sei, Fig. 14, a die Höhe SC des Kegels, b der Strahl AC seiner Grundfläche, und x die Entfernung des Scheitels vom Centrum des obern Kreises des Cylinders.

Die ähnlichen Dreiecke SAC, SED geben

$$SC : AC = SD : ED$$

oder

$$a : b = x : ED,$$

daher

$$ED = \frac{bx}{a}.$$

Es sei $1 : \pi$ das Verhältniss des Diameters zum Umkreise; man weiss, dass der Inhalt eines Zirkels, dessen Strahl r ist, dem Produkte $r^2\pi$ gleich sei; der Inhalt des Zirkels EGF also, dessen Strahl $= \frac{bx}{a}$, wird $\frac{\pi b^2}{a^2} x^2$ sein; wird dieser Inhalt durch die Höhe DC des Cylinders, d. i. $a - x$ vervielfacht, so hat man $\frac{\pi b^2}{a^2} x^2 (a - x)$ für den cubischen Inhalt des Cylinders.

Man hat also die Gleichung $y = \frac{\pi b^2}{a^2} (ax^2 - x^3)$ zu differenzüren; hierdurch erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi b^2}{a^2} (2ax - 3x^2),$$

und $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\pi b^2}{a^2} (2a - 6x);$$

wird der Werth von $\frac{dy}{dx}$ gleich Null gesetzt; so ist:

$$\frac{\pi b^2}{a^2} (2ax - 3x^2) = o,$$

oder $2ax - 3x^2 = o,$

welche Gleichung ein Produkt der Faktoren x, und $2a - 3x$ ist; sie liefert also $x = o$, oder $x = \frac{2a}{3}$; der Werth von $x = o$ kann keinem Maximum entsprechen, weil in dieser Voraussetzung $\frac{d^2y}{dx^2}$ auf $\frac{2\pi b^2}{a}$ = einer positiven Zahl reducirt wird; dieser Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ zeigt ein Minimum an; und wirklich verwandelt sich für $x = o$ der Cylinder in die Axe des Kegels (denn je höher der Cylinder, desto dünner ist er).

Der Werth $x = \frac{2a}{3}$ ist also der einzige, welcher der Aufgabe Genüge leisten kann, und in dieser Voraussetzung wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ auf $-\frac{2\pi b^2}{a}$, d. i. auf eine negative Zahl reducirt. Wenn man also $SD = x = \frac{2}{3}$ SC von der Höhe des Cylinders wegnimmt, bleibt noch CD $= \frac{1}{3}$ SC. Aus diesem geht deutlich hervor, *dass die Höhe des grössten Cylinders, der in einen Kegel beschrieben werden kann, der dritte Theil von der Höhe des Kegels ist.*

Aufgabe III.

102) *Eine Gerade* AB, *Fig.* 15, *in zwei Theile* AC *und* CB *zu theilen, dass das Produkt* $AC^3 \times CB$ *ein Maximum sei.*

Man bezeichne die Gerade AB durch a, den Theil CB durch x, und die Gleichung für die Aufgabe wird sein:

$$y = x^3 (a - x),$$

woraus man erhält:

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 - 4x^3; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6ax - 12x^2;$$

setzt man den Werth von $\frac{dy}{dx}$ gleich o, so findet man $x = o$, oder $x = \frac{3a}{4}$; durch diesen Werth allein kann die Aufgabe aufgelöset werden, weil dadurch der Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ auf $-\frac{9a^2}{4}$ gebracht wird.

103) Man bemerke, dass wenn in dem Werthe des Differenzial-Coëfficienten $\frac{dy}{dx}$ ein constanter positiver Faktor vorkömmt, dieser ausgelassen werden könne. In der That, wenn

$$\frac{dy}{dx} = A\varphi x,$$

so folgt daraus:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\,\frac{D.\ \varphi x}{dx};$$

diese zweite Gleichung dient nur dazu, das Zeichen des Werthes von $\frac{d^2y}{dx^2}$ kennen zu lernen, welches nur von demjenigen abhängt, womit $\frac{D.\ \varphi x}{dx}$ behaftet ist, weil A ein constanter positiver Faktor ist, wesswegen A in dieser Gleichung, wie auch in $\frac{dy}{dx} = A\varphi x$ ausgelassen werden kann; denn da der zweite Theil der Gleichung gleich Null gesetzt werden muss, um x zu bestimmen, liefert uns die Gleichung $A\varphi x = o$, $\varphi x = o$; woraus folgt, dass man mit Recht die Constante weglassen könne.

Aufgabe IV.

104) *Man will in ein cylinderförmiges Gefäss, dessen Volumen gegeben ist, eine gewisse Quantität Wasser giessen; man verlangt die Dimensionen, welche dem Gefässe gegeben werden müssen, damit seine innere Fläche so klein als nur möglich sei.*

Es sei V das gegebene Volumen des Wassers, und x der Radius der Grundfläche des Cylinders; $x^2\pi$ wird der Flächeninhalt der Grundfläche des Cylinders sein, und weil die Höhe des Cylinders, vervielfacht durch seine Grundfläche, seinen cubischen Inhalt giebt, so hat man:

$$\textit{Höhe des Cylinders} \times \pi x^2 = V,$$

hieraus

$$\textit{Höhe des Cylinders} = \frac{V}{\pi x^2};$$

vervielfacht man diese Höhe durch den Umfang der Grundfläche $2\pi x$, so erhält man:

$$\frac{V}{\pi x^2} \times 2\pi x = \frac{2V}{x}$$

für die convexe Oberfläche des Cylinders. Addirt man zu dieser Oberfläche πx, der Grundfläche des Cylinders; so ist die Gleichung, welche differenziirt werden soll,

$$y = \frac{2V}{x} + \pi x^2,$$

hieraus leitet man ab:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2V}{x^2} + 2\pi x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4V}{x^3} + 2\pi.$$

Der Werth von $\frac{dy}{dx}$ gleich Null giebt

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{x}}.$$

Man sieht, dass dieser Werth einem *Minimum* entspreche, weil dadurch der von $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv wird; der Strahl der Grundfläche des gesuchten Cylinders wird also $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ sein. Führt man diesen Werth in den Ausdruck für die Höhe ein, so findet man für die Höhe des Cylinders

$$\frac{V}{\frac{\pi V^{2/3}}{\pi^{2/3}}} = \frac{V^{1/3}}{\pi^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Diese Aufgabe findet ihre Anwendung in der Artillerie; *denn es sei eine Ladung Pulver gegeben, man soll die Dimensionen des Mörsers mit cylinderförmiger Kammer finden, damit das Pulver die geringste Wirkung gegen die Wände des Mörsers ausübe.*

Es ist deutlich, dass die Aufgabe auf diese zurück geführt werden könne, die kleinste Oberfläche zu finden, welche man der Kammer des Mörsers geben könne. Es folgt aus dem Vorhergehenden, dass der Radius der Kammer ihrer Höhe gleich sein müsse.

Aufgabe V.

105) *Unter allen in eine Kugel beschriebenen Kegeln denjenigen zu finden, der die kleinste convexe Oberfläche hat.*

Man nehme an, der Halbkreis AMB, Fig. 16, drehe sich um seine Axe AB; die Sehne AM wird einen Kegel beschreiben, dessen Höhe AP, und der Radius seiner Grundfläche PM sein wird.

Die convexe Oberfläche dieses Kegels wird ausgedrückt durch *Peripherie* $PM \times \frac{1}{2} AM = 2\pi PM . \frac{1}{2} AM = \pi PM . AM$. Man darf also hier nur PM und AM bestimmen; zu diesem Endzwecke sei $AB = 2a$, $AP = x$, und daher

$$x : PM = PM : 2a - x,$$

also

$$PM = \sqrt{2ax - x^2};$$

ebenso

$$x : AM = AM : 2a;$$

folglich $AM = \sqrt{2ax}$; führt man diese Werthe in den Ausdruck für die Oberfläche des Kegels ein, so wird man erhalten:

$$\textit{Convexe Oberfl. des Kegels} = \pi \sqrt{2ax - x^2} \sqrt{2ax}$$
$$= \pi \sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3};$$

die zu differenziirende Gleichung ist also, Art. 103,

$$y = \sqrt{4a^2x^2 - 2ax^2},$$

woraus man ableitet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4a^2x - 3ax^2}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^2}},$$

oder nach Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors x,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4a^2 - 3ax}{\sqrt{4a^2 - 2ax}} \quad \ldots\ldots\ldots (50)$$

Setzt man den Werth von $\frac{dy}{dx}$ gleich Null, so ist

$$4a^2 - 3ax = 0,$$

hieraus

$$x = \frac{4a}{3},$$

welcher Werth einem Minimum entspricht, wie aus dem Zeichen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ erhellet.

106) Bevor wir den Werth des Differenzial-Coëfficienten bestimmen, wollen wir ein Verfahren erklären, wodurch die Rechnung in gewissen Fällen abgekürzt wird. Wir wollen vorläufig bemerken, dass wenn eine Funktion durch einen dem x beigelegten Werth Null wird, nicht allgemein auch sein Differenzial-Coefficient Null sei; so wird z. B. die Funktion $x^2 - 5x + 6$ für $x = 2$ oder $x = 3$, Null, ohne dass der Differenzial-Coëfficient $2x - 5$ dieser Funktion unter dieser Voraussetzung Null werde.

107) Oft können die Operationen, derer man sich bedient bei der Erforschung, ob eine Funktion ein Maximum oder Minimum zulasse, sehr abgekürzt werden. Wollte man z. B. den Differenzial-Coëfficienten der Gleichung $\frac{dy}{dx} = XX'$ bestimmen, in welcher X und X′ Funktionen von x sind, von denen nur die erste Null wird, wenn x einen gewissen Werth bekömmt. Diffe-

renziirt man diese Gleichung nach Art. 14, und dividirt nachher durch dx, so erhält man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{X\,\mathrm{D}.X'}{dx} + \frac{X'\,\mathrm{D}.X}{dx};$$

ist X durch den Werth, welchen man dem x beilegt, Null geworden, so wird diese Gleichung auf folgende reducirt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{X'\,\mathrm{D}.X}{dx};$$

woraus erhellet, dass, um $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu erhalten, der Differenzial-Coëfficient des Faktors, welcher Null ist, durch den andern Faktor multiplicirt werden müsse *).

108) Wollte man z. B. den Differenzial-Coëfficienten der zweiten Ordnung von $y = \frac{x - a}{\sqrt{x}}$ für $x = a$ erhalten, so gebe man der Gleichung folgende Form:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times (x - a),$$

und man wird finden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{d\,(x - a)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

*) Diese Regel ist nicht ohne Ausnahme; denn $\frac{\mathrm{D}.X}{dx}$ kann auch Null sein. Hätte man z. B. $\frac{dy}{dx} = x^2\ (x - a)^2$ eine Gleichung, welche gleiche Wurzeln enthält; so wären die beiden Glieder des Werthes von $\frac{d^2y}{dx^2}$ Null; anstatt also den Faktor $X\,\frac{\mathrm{D}.X'}{dx}$ aufzuheben, müsste man seine Zuflucht zu den Differenzial-Coëfficienten höherer Ordnungen nehmen, um zu erkennen, ob die Funktion eines Maximums oder Minimums fähig sei; wäre $\frac{dX'}{dx}$ unendlich, so würde man auf den Fall Art. 87. stossen. (Anmerk. d. V.)

109) Wir wollen nun wiederum die Gleichuug (50) hervornehmen, aus welcher wir den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $x = \frac{4a}{3}$ abzuleiten uns vorgenommen haben. Zerfällt man den Nenner in seine Faktoren, so ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax\ (4a - 3x)}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}} \times (4a - 3x) = \frac{ax}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}}$$

in der wirklichen Annahme, dass der Faktor $4a - 3x$ Null sei, erhält man, Art. 107,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ax}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}} \times \frac{d\ (4a - 3x)}{dx}$$

$$= - \frac{3ax}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}},$$

folglich, wenn man die beiden Glieder des Bruches durch x dividirt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{3a}{\sqrt{4a^2 - 2ax}};$$

setzt man in diesen Ausdruck den Werth von $x = \frac{4a}{3}$; so erhält man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{3a}{\sqrt{4a^2 - \frac{8a^2}{3}}} = - \frac{3a}{\sqrt{\frac{4a^2}{3}}};$$

da dieser Werth negativ ist, so entspricht derjenige für x einem *Maximum*.

Aufgabe VI.

110) *Es sei ein Punkt C, Fig. 17, zwischen den Schenkeln des Winkels YAX gegeben; man soll durch diesen Punkt eine Gerade DE führen, die den Axen AX, AY so begegne, dass die Länge DE dieser Geraden ein Minimum sei.*

Man setze $AJ = a$, $JC = b$, $JE = x$; die rechtwinklichten Dreiecke JCE, ADE geben:

$$JE : JC = AE : AD.$$

oder $\quad x : b = a + x : AD;$

also:

$$AD = \frac{b}{x}(a + x),$$

folglich:

$$AD^2 = \frac{b^2}{x^2}(a + x)^2.$$

Ferner:

$$AE^2 = (a + x)^2;$$

wird dieser Werth in der Formel

$$DE = \sqrt{AD^2 + AE^2}$$

substituirt, so findet man:

$$DE = \sqrt{\frac{b^2}{x^2}(a+x)^2 + (a+x)^2} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{x^2} + 1\right)(a+x)^2};$$

$$= \frac{a + x}{x}\sqrt{b^2 + x^2} = y.$$

Betrachtet man diesen Ausdruck als das Produkt des Faktors $\frac{a + x}{x}$ durch den Faktor $\sqrt{b^2 + x^2}$, und differenziirt nach Art. 14., so findet man:

$$dy = \frac{a + x}{x}\,\text{D}.\sqrt{b^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + x^2}\,\text{D}.\frac{a + x}{x}.$$

Werden die angezeigten Differenziationen verrichtet, so hat man:

$$dy = \frac{(a + x)}{x}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{b^2 + x^2}} + \sqrt{b^2 + x^2} \times -\frac{adx}{x^2};$$

wird unter gleiche Benennung gebracht, und die Glieder des ersten Bruches durch x, die des zweiten durch $\sqrt{b^2 + x^2}$ dividirt, so ergiebt sich:

$$dy = \frac{(a + x)}{x^2}\cdot\frac{x^2dx}{\sqrt{b^2 + x^2}} + \frac{b^2 + x^2}{x^2\sqrt{b^2 + x^2}} \times -adx;$$

wird der Nenner zusammengezogen, reducirt, dann durch dx dividirt, so ist endlich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - ab^2}{x^2\sqrt{b^2 + x^2}};$$

wird der Zähler gleich Null gesetzt, so findet man:

$$x = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Um zu beweisen, dass dieser Werth in dieser Hypothese einem *Minimum* entspreche, so darf man nur, Art. 107, an die Stelle des Zählers, welcher der Null Faktor ist, seinen Differenzial-Coëfficienten setzen, und man hat:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x^2}{x^2\sqrt{b^2+x^2}} = \frac{3}{\sqrt{b^2+x^2}},$$

ein wesentlich positiver Werth. Man substituirt desswegen den Werth von x nicht, weil man weiss, dass ein Quadrat x^2 immer positiv ist.

Aufgabe VII.

111) *Man soll das grösste rechtwinklichte Dreieck finden, welches über eine gegebene Gerade construirt werden kann.*

Es sei die Gerade $AB = a$, Fig. 18, x eine von den Seiten des Dreiecks; die andere wird dann $\sqrt{a^2 - x^2}$ sein; der Ausdruck also vom Inhalte des Dreiecks ist:

$$\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2},$$

und die Gleichung für die Aufgabe, Art. 103,

$$y = x\sqrt{a^2 - x^2}, \text{ oder vielmehr } y = \sqrt{a^2x^2 - x^4},$$

woraus man ableitet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2x - 2x^3}{\sqrt{a^2x^2 - x^4}}.$$

Wird dieser Werth gleich Null gesetzt, so giebt er

$$a^2x - 2x^3 = o, \text{ oder } x(a^2 - 2x^2) = o;$$

woraus

$$x = o, \text{ oder } 2x^2 = a^2$$

erhalten wird.

Da x nicht Null sein kann, so muss es durch die zweite Gleichung bestimmt werden, woraus ersichtlich ist, dass die Seiten AC, BC gleich sind.

Differenzürt man den Faktor $a^2 - 2x^2$, so findet man, Art. 107,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{\sqrt{a^2x^2 - x^4}} \times \frac{d(a^2 - 2x^2)}{dx}$$
$$= - \frac{4x^2}{\sqrt{a^2x^2 - x^4}}.$$

Da dieses Resultat negativ ist, so wird durch die Annahme $a^2 - 2x^2 = o$ für x ein Werth bestimmt, der einem Maximum entspricht.

Von der geometrischen Bezeichnung der Differenzial-Coëfficienten.

112) Man hat, Art. 71, gesehen, dass $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels bezeichne, welchen eine Tangente an den Punkt gezogen, dessen Coordinaten x und y sind, mit der Axe der Abscissen bildet. Da das Nachfolgende sich hierauf gründet, könnte dieser Satz auch auf folgende Art *a priori* bewiesen werden. Es seien nämlich, Fig. 4, $PM = y$, $PP' = h$; zieht man MQ parallel zur Axe der x, so hat man:

$$M'P' = f(x + h)$$
$$M'Q = f(x + h) - fx$$
$$= \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

Nun aber:

$$MQ : M'Q = 1 : \text{Tang. } S = \frac{M'Q}{MQ};$$

und setzt man für M'Q und MQ ihre Werthe, so wird man

$$\text{Tang. } S = \frac{\frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \ldots}{h}$$
$$= \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h}{1.2} + \ldots$$

Geht man zum Gränzverhältniss über, so ist h Null, die Tangente S verwandelt sich in die Tangente T; also

$$\text{Tang. } T = \frac{dy}{dx}.$$

Gesetzt nun, PM wird ein Maximum, und da die Tangente TM, Fig. 19, der Axe der Abscissen parallel mit ihr einen Winkel macht, welcher Null ist: da man ferner eben gesehen hat, dass die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Tangente mit der Axe der x bildet, durch $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet werde; so hat man in diesem Falle $\frac{dy}{dx} = o$.

Man könnte ebenso beweisen, dass wenn PM ein Minimum wäre, die trigonometrische Tangente, welche in diesem Falle auch Null wird, $\frac{dy}{dx} = o$ sein müsste.

Diese Gleichung drückt aber nichts anders aus als die Bedingung der Parallelität der Tangente in M mit der Axe der Abscissen.

113) Untersuchen wir nun, in welchem Falle $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv oder negativ ist.

Wir Wollen desshalb erst den Fall betrachten, wo die Curve, Fig. 20, ihre Convexität gegen die Axe der Abscissen kehrt.

Es seien $AP = x$; $PM = y$; $PP' = P'P'' = h$, durch die Punkte M und M′ die Sekante MM′S und die Geraden MN, M′N′ parallel zur Axe der Abscissen gezogen.

Hiedurch erhalten wir:

$$M'O = M'P' - MP = f(x + h) - fx,$$

d. h.

$$M'O = \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

Nun aber vermöge der ähnlichen Dreiecke MM′O, MSN ist

$$MO : MN = M'O : SN$$

oder $h : 2h = M'O : SN$

also $SN = 2M'O$;

und wenn man für M'O seinen Werth substituirt,

$$SN = 2 \frac{dy}{dx} h + 2 \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

Ferner

$$M''P'' = f(x + 2h),$$

wird hievon NP'' = PM abgezogen, so ist:

$$M''N = f(x+h) - y = \frac{dy}{dx} 2h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{4h^2}{1.2} + \ldots$$

Nimmt man von diesem Werthe jenen von SN weg, so bleibt noch übrig, Fig. 20,

$$M''S = \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \ldots\ldots (51).$$

Im Falle die Curve, Fig. 21, ihre hohle Seite der Abscissenlinie kehrt, muss umgekehrt M''S von SN abgezogen werden, diess giebt:

$$M''S = -\frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \ldots\ldots (52).$$

Vergleicht man diese beiden Werthe (51) und (52) für M''S miteinander, so ist klar, dass in dem einen $\frac{d^2y}{dx^2}$ das Zeichen + in dem andern das Zeichen — habe. Man kann aber bewirken, dass das Zeichen des ersten Gliedes der Reihe für M''S für alle folgenden der nämlichen Reihe entscheidend sei; und da das Quadrat h^2, welches immer positiv ist, auf das Zeichen von $\frac{d^2y}{dx^2} h^2$ keinen Einfluss haben kann, so entscheidet der Differenzial-Coëfficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ allein über das Zeichen der Summe aller Glieder des Werthes für M''S.

Betrachtet man die Gleichungen (51) und (52) nur in Hinsicht ihrer Zeichen, womit ein jedes Glied behaftet ist, so kann man sowohl h^2 als auch die auf $\frac{d^2y}{dx^2}$ folgenden Glieder unterdrücken, und diese Gleichungen werden:

$$M''S = + \frac{d^2y}{dx^2};\ M''S = - \frac{d^2y}{dx^2};$$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= + M''S \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= - M''S \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (53).$$

Betrachtet man y als eine positive Grösse, so wird M″S, Fig. 20, welches auf die Seite der y fällt, positiv sein. Die erste der Gleichungen (53) lehrt uns also, dass wenn die Curve, Fig. 20, ihre convexe Seite der Abscissenlinie kehrt, $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv sei.

Betrachtet man hierauf die zweite der Gleichungen (53), und die Figur 21, welche sich darauf bezieht, so wird man sehen, dass — M″S eine Gerade vorstellt, die mit einem dem von y entgegengesetzten Zeichen behaftet, und dass mithin $\frac{d^2y}{dx^2}$ in Fig. 21, negativ ist, d. h. wenn die Curve ihre hohle Seite der Abscissen Axe kehret.

114) Bis hieher wurde angenommen, die Curve läge oberhalb der Axe der Abscissen. Wir wollen nun untersuchen, was geschieht, wenn sie sich unterhalb, wie Fig. 67, ausbreitet.

Es ist gewiss, dass, nach dem Vorhergehenden zu urtheilen, $\frac{d^2y}{dx^2}$, und mithin MN positiv ist, weil die Curve in M der Abscissenlinie ihre Convexität zukehrt. Nun aber müssen die Geraden MN und M′N′ welche auf derselben Seite mit der Tangente TT liegen, das nämliche Zeichen haben, und da MN positiv ist, es auch M′N′ sein muss; so folgt daraus, dass in dem Punkte M′, wo die Curve ihre hohle Seite der Abscissenaxe kehrt $\frac{d^2y}{dx^2}$ ein der negativen Ordinate P′M′ ent-

gegengesetztes Zeichen habe; und umgekehrt würde die Curve ihre convexe Seite kehren, wenn y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit demselben Zeichen behaftet wären. Man kann also allgemein sagen, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit y dasselbe Zeichen habe, auf welche Seite auch die Curve fallen mag, wenn die Curve ihre Convexität der Abscissen-Axe kehrt, und ein entgegengesetztes Zeichen annehme, wenn die Curve ihre hohle Seite derselben Axe zukehrt.

Kehrt nun die Curve ihre Convexität oder Concavität gegen die Abscissen-Axe, je nachdem die Ordinate auf ihr Kleinstes oder Grösstes gekommen ist, so sieht man leicht ein, warum $\frac{d^2y}{dx^2}$ im ersten Falle positiv, im zweiten negativ ist.

115) Man sagt ferner: ein Maximum oder Minimum finde Statt, wenn $\frac{dy}{dx} = \infty$. Um die Bezeichnung dieser Bedingung erklären zu können, sei $y = fx$ die Gleichung einer Curve MN, Fig. 22, so ist gewiss, dass wenn man dem x einen Werth AP beilegt, durch diese Gleichung die Ordinate PM bestimmt werde.

Löst man die Gleichung für y auf, und leitet daraus $x = \varphi y$ ab, so giebt die Gleichung $y = AP'$ (voriger Werth von y), $x = P'M$, in welchem Falle y als Abscisse und x als Ordinate betrachtet ist. Die nämliche Curve lässt sich auch construiren, wenn man die Abscissen y auf der Axe AY, und auf der andern Axe die Ordinaten nimmt.

Bei dieser Annahme kann man das Maximum oder Minimum der Funktion x von y suchen. Hiezu leitet man aus der gegebenen Gleichung $\frac{dx}{dy} = M$ ab, und nehme $M = o$ an; die Gleichung $\frac{dx}{dy} = M$ liefert uns

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{M}$, wornach offenbar $\frac{dy}{dx} = \infty$, wenn $M = o$. Die nothwendige Bedingung also, unter welcher ein Maximum oder Minimum auf der Seite der Abscissen Statt findet, ist, dass $\frac{dy}{dx} = \infty$ sei.

116) Hätte man z. B. die Gleichung

$$y^2 = ax + b,$$

so ergäbe sich daraus $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$; würde dieser Werth $= o$, so erhielte man $y = \infty$; hieraus folgt, dass die Curve auf der Seite der Ordinaten nur in einer unendlichen Entfernung der Axe der x ein Maximum haben könne. Wir wollen nun untersuchen, ob die Curve auf der Seite der Abscissen eine Gränze habe (unter Gränze versteht man im Allgemeinen das Maximum und das Minimum); man muss deswegen den Werth von $\frac{dy}{dx}$ unendlich annehmen, und diess giebt $\frac{a}{2y} = \infty$, welcher Bedingung Genüge geleistet wird, wenn $y = o$, in welcher Voraussetzung $\frac{d^2y}{dx^2}$ auf $\frac{2}{a}$ reducirt wird, und dieses Resultat ist positiv. Man sieht hieraus, dass der Werth von $y = o$ einem Minimum für x entspreche. Dieses Minimum lässt sich auch bestimmen, wenn in der gegebenen Gleichung $y = o$ angenommen wird; hiedurch wird $ax - b = o$, und daraus $x = \frac{b}{a}$ für das gesuchte Minimum, welches durch AM, Fig. 23, vorgestellt ist.

117) Zum Schlusse dieser Materie bemerken wir noch, dass die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \infty$ anzeigt, MF, Fig. 23, sei die Tangente eines rechten Winkels, und also zur Axe der x senkrecht.

Allgemeine Betrachtungen über die einfachen Punkte der Curven.

118) Die Differenzialrechnung kann bei Auffindung der Form einer Curve, deren Gleichung gegeben ist, wichtige Dienste leisten.

Die Lehre vom Grössten und Kleinsten giebt uns schon Mittel an die Hand, ihre Gränzen auf der Seite der Abscissen und der Ordinaten kennen zu lernen, was aber noch nicht hinreichend ist für die Bestimmung der Form der Curve. So z. B. die Curven, Fig. 68, 69, 70, welche die nämlichen Gränzen OC, OD auf der Seite der Ordinaten, und OA, OB auf der Seite der Abscissen haben, gleichen sich in Hinsicht der Form nicht. Die Curve, Fig. 68, unterscheidet sich von der Fig. 69, durch einen *Flexionspunkt*, so wird nämlich der Punkt genannt, wo die concave Richtung einer Curve convex wird, oder umgekehrt.

In der Figur 68 sind zwei Biegungspunkte, der eine in E, der andere in G, und ein Wendungspunkt in C, nämlich ein solcher Punkt, wo auf einmal die Richtung der Curve aufhört.

119) Man nennt überhaupt jene Punkte, in welchen die Curve eine Veränderung erleidet, *einfache Punkte*. Niemand wird zweifeln, dass es nicht schwer sei, der Richtung der Curve zu folgen, wenn es Mittel giebt, dergleichen Punkte zu erforschen. Wüsste man z. B., dass die Curve, Fig. 70, in E und H Biegungs-, in F und G Wendungspunkte hätte; so könnte man sich von dieser Curve aus folgender Analyse eine Vorstellung machen. Von dem Punkte A, der Gränze auf der Seite der Abscissen bis E kehrt die Curve ihre hohle Seite der Axe der Abscissen; diess ist also ein Biegungspunkt, von wo an nämlich die concave Richtung der Curve convex wird. An dem äussersten Ende F des convexen Theils EF verlässt die Curve ihren Lauf im Wendungspunkte F auf dessen Seite sie noch in dem Theile FH convex ist, um jenseits des Einbiegungspunktes H wie-

der concav zu werden, bis sie zu dem Punkte C gelangt, welcher die Gränze ist auf der Seite der Ordinaten. Von C bis G, und von A bis G ist die Curve aus zwei Bögen CBG, ADG zusammengesetzt, welche ihre hohle Seite der Axe der Abscissen kehren, sich in einem Wendungspunkt vereinigen, und zweimal die Gränze in C und B überschreiten, die eine findet sich auf der Seite der Abscissen, die andere auf der Seite der Ordinaten.

120) Nach dem Vorhergehenden zu urtheilen, wäre es sehr vortheilhaft, mit Hilfe der Gleichung einer Curve die Coordinaten der einfachen Punkte zu bestimmen. Wir haben uns schon mit den Mitteln bekannt gemacht, wodurch man das Grösste und Kleinste bestimmen kann. Es bleibt uns also nur noch die Untersuchung anderer einfachen Punkte übrig, und diese ist der Gegenstand der folgenden Paragraphe.

Von den Einbiegungspunkten der Curven.

121) Wir haben eben gesehen, dass ein Einbiegungspunkt derjenige sei, in welchem aus einer convexen Curve eine concave, und aus einer concaven eine convexe wird. Die Curve M′MM″, Fig. 71, bietet uns in M einen Punkt dieser Art dar. Man ziehe an diesen Punkt eine Tangente TT′; betrachtet man die verschiedenen Ordinaten, zwischen M′P′ und MP, so wird man sehen, dass die Verlängerung M′N′ der Ordinate bis an die Curve, beständig abnehmend, im Punkte M verschwinden wird. Betrachtet man die folgenden Ordinaten, so wird die Verlängerung M″N″ der Ordinate unterhalb der Tangente fallen, mithin ihr Zeichen ändern, so dass wenn M′N′ positiv war, M″N″ negativ sein werde. Diese Bedingung wollen wir nun durch eine Gleichung ausdrücken.

Es sei, Fig. 71, $PP' = h = PP''$; so hat man offenbar:

$$M'N' = M'P' - N'P',$$

oder

$$M'N' = f(x + h) - N'P' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (54).$$

Zur Bestimmung des analytischen Werthes von $N'P'$ hat man $N'P' = MP + N'O$,

oder $N'P' = y + N'O$ (55).

Für $N'O$ erhält man aus dem rechtwinklichten Dreiecke $N'MO$:

$$N'O = MO \text{ Tang. } N'MO.$$

Nun aber hat der Winkel $N'MO$, Art. 71, welcher durch die Tangente bei M und durch eine zur Axe der x Parallele gebildet wird, den Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ zur trigonometrischen Tangente; folglich, wenn man $\frac{dy}{dx}$ für Tang. $N'MO$ und h an die Stelle von MO schreibt:

$$N'O = h \frac{dy}{dx};$$

substituirt man diesen Werth in (55), und setzt nachher den von $N'P'$ in die Gleichung (54), so erhällt man:

$$M'N' = f(x + h) - y - \frac{dy}{dx} h \; . \; . \; . \; . \; (56).$$

Ohne aufs neue den Werth $M''N''$ zu berechnen, kann man ihn aus dem für $M'N'$ herleiten. Denn lässt man die Ordinate sich immer parallel fortbewegen, so fällt $M'N'$ mit $M''N''$ zusammen, sobald h in $-$ h sich ändert; giebt man nun diesem h den Werth in der Gleichung (56), so ergiebt sich:

$$M''N'' = f(x - h) - h + \frac{dy}{dx} h \; . \; . \; . \; . \; (57).$$

Ersetzt man die Ausdrücke $f(x + h)$ und $f(x - h)$ durch ihre Entwicklungen, so ist:

$$M'N' = \left(y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\right) - y$$
$$- \frac{dy}{dx} h,$$

$$M''N'' = \left(y - \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\right) - y$$
$$+ \frac{dy}{dx} h;$$

und nach vorgenommenen Reductionen werden diese Gleichungen:

$$M'N' = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \dots \text{ (58)}.$$

$$M''N'' = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \dots \text{ (59)}.$$

Damit nun ein Einbiegungspunkt Statt finde, müssen nothwendigerweise, wenn h einen sehr kleinen Werth annimmt, die eine der Geraden $M'N'$ und $M''N''$ oberhalb, die andere unterhalb der Geraden TT' fallen; welches nur dann geschieht, wenn $M'N'$ und $M''N''$ verschiedene Zeichen haben, welches in dem Falle eintrifft, da das erste Glied $\frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2}$ der Reihen (58) und (59) Null wird. Wäre dieses Glied nicht Null, so könnte man der Grösse h einen so kleinen Werth beilegen, dass das Glied $\frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2}$ die algebraische Summe aller andern Glieder der Reihe überstiege, wo dann das Zeichen dieses Gliedes jenes des erhaltenen Resultats wäre; und da dieses Glied in beiden Reihen das Nämliche ist, so würde folgen, dass $M'N'$, und $M''N''$, Fig. 71. nothwendig dasselbe Zeichen hätten. Damit also $M'N'$ und $M''N''$ verschiedene Zeichen haben, muss

$$\frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} = 0,$$

oder vielmehr

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ sein.}$$

122) Ereignete es sich, dass derselbe Werth von x, wodurch $\frac{d^2y}{dx^2}$ verschwindet, auch die Ursache des Verschwindens von $\frac{d^3y}{dx^3}$ wäre, so müsste $\frac{d^4y}{dx^4}$ Null sein, um einen Einbiegungspunkt zu haben. Wäre nun auch $\frac{d^5y}{dx^5}$

Null, so müsste es auch $\frac{d^6y}{dx^6}$ sein, u. s. w., und also der letzte Differenzial-Coëfficient, welcher Null wäre, durch eine gerade Zahl angezeigt werden.

123) Wenn der Werth von x, der in beiden Formeln (58) und (59) derselbe ist, von der Beschaffenheit wäre, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich würde, so wären es die beiden Reihen auch; da dann aus dem vorigen Beweise, der auf der Möglichkeit dieser Reihen beruht, kein Schluss gezogen werden könnte. In diesem Falle muss man bemerken, dass die Bedingung $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ überhaupt anzeige, $\frac{d^2y}{dx^2}$ müsse im Einbiegungspunkt sein Zeichen ändern, welches auch mit Artikel 113 vollkommen übereinstimmt. $\frac{d^2y}{dx^2}$ kann aber auch sein Zeichen ändern, wenn es das Unendliche überschreitet. Es sei z. B.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b^2}{x - a}.$$

Substituirt man nach und nach für x die Werthe

$x = a - h$, so findet man $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{h}$,

$x = a$ „ „ „ $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$,

$x = a + h$ „ „ „ $\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{b^2}{h}$.

Man sieht hieraus, dass durch den Nenner des Werthes für $\frac{d^2y}{dx^2}$ das Zeichen des Differenzial-Coëfficienten nach dem Einbiegungspunkte verändert wird.

124) Hieraus geht hervor, dass um einen Einbiegungspunkt zu bestimmen, die Abscisse dieses Punktes

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \text{ oder } \frac{d^2y}{dx^2} = \infty$$

sein müsse.

Hat man sich versichert, dass eine von den Bedingungen erfüllt ist, so vermehre und vermindere man um eine sehr kleine Grösse h nach und nach die Abscisse des Punktes, welcher die vorgeschriebene Bedingung erfüllt; und wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ für diese neuen Werthe von x mit verschiedenen Zeichen behaftet erscheint, muss man daraus abnehmen, dass ein Einbiegungspunkt vorhanden sei. Denn sobald $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, kehrt die Curve ihre convexe Seite gegen die Axe der Abscissen, während bei einem negativen Zeichen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ die Curve ihre Concavität derselben Axe zuwendet. Diese Veränderung von convexer Richtung in concave, und von concaver in convexe zeigt nichts anders als einen Einbiegungspunkt an.

125) Um von dieser Lehre eine Anwendung zu zeigen, wollen wir untersuchen, ob die Curve der Gleichung

$$y = b + 2(x - a)^2 \ldots\ldots (60)$$

einen Einbiegungspunkt enthalte.

Die Differenziation giebt:

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 2(x - a)^2; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 12(x - a),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 12.$$

Damit nun ein Einbiegungspunkt Statt finden könne, muss es einen Werth für x geben, wodurch das Glied $\frac{d^2y}{dx^2}$ Null wird. Da aber x eine Veränderliche ist, gebe

man ihr einen solchen Werth, dass $12(x-a)=o$ werde, woraus $x=a$ für die Abscisse, die einem Einbiegungspunkte angehören kann. Um sich von dem Dasein eines solchen Punktes zu überzeugen, vermindere man die Abscisse a um eine kleine Grösse h, und setze $a-h$ für x; hiedurch findet man $\frac{d^2y}{dx^2}=-12h$ für den Punkt M′, Fig. 72, dessen Abscisse $a-h$ ist. Setzt man $a+h$ für x, so ergiebt sich, dass dem Punkte M″, dessen Abscisse $a+h$ ist, $\frac{d^2y}{dx^2}=12h$ correspondire. Diese beiden Werthe mit verschiedenen Zeichen behaftet, beweisen, dass in M ein Einbiegungspunkt Statt habe.

Die Annahme $x=a$ macht $\frac{dy}{dx}$ verschwinden, mithin ist die Tangente am Einbiegungspunkte zur Axe der x parallel.

126) Es ist zu bemerken, dass man nicht immer berechtigt ist, den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleich Null zu setzen. Wollte man z. B. untersuchen, ob die Curve der Gleichung

$$y=b+ax^2$$

Einbiegungspunkte habe, so würde man durch Differenziation erhalten.

$$\frac{dy}{dx}=2ax;\ \frac{d^2y}{dx^2}=2a.$$

Man sieht hieraus, dass der Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ nicht gleich Null gesetzt werden kann, weil er keine unbestimmte Grösse enthält, mithin lässt die Curve keinen Einbiegungspunkt zu, auf welches Resultat man Acht haben muss, da die Curve eine Parabel ist. Aus dem Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$ erkennt man nur, dass die Parabel continuirlich ihre Convexität der Axe der Abscissen zukehrt.

127) Es sei *drittens*

$$y^3 = x^5;$$

wird für y aufgelöst, und hierauf differenziirt, so erhält man:

$$y = x^{5/3};\ \frac{dy}{dx} = {}^5/_3\, x^{2/3};\ \frac{d^2y}{dx^2} = {}^5/_3 \cdot {}^2/_3 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Wollte man x durch die Gleichung ${}^5/_3 \cdot {}^2/_3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = o$, oder vielmehr $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = o$ bestimmen, so könnte der Gleichung nur durch $x = \infty$ Genüge geleistet werden, was jedoch zu keinem Resultate führte. Da es aber in unserer Willkühr steht, den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich zu setzen, so wird der Gleichung $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty$ durch $x = o$ Genüge geleistet. Dieser Werth zeigt an, dass im Anfangspunkte ein Einbiegungspunkt Statt finden kann. Um sich von der Existenz eines solchen Punktes zu überzeugen, substituire man nach und nach für x die Werthe $x = o + h$, und $x = o - h$, d. i. . . . h und $-h$, und man wird sehen, ob in diesen beiden Fällen $\frac{d^2y}{dx^2}$ Resultate mit entgegengesetzten Zeichen zur Folge habe. Anstatt aber diese Geschäfte so nach und nach zu verrichten, kann alles auf einmal geschehen, wenn man für x den Werth $\pm h$ substituirt, wodurch der Differenzial-Coëfficient der zweiten Ordnung wird:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\ {}^3/_5 \cdot {}^2/_3 \frac{1}{\sqrt[3]{h}},$$

das obere Zeichen bezieht sich auf eine Abscisse, die kleiner als die für den Einbiegungspunkt; und das untere auf eine kleinere Abscisse. Da die beiden Werthe verschiedene Zeichen haben, kann man schliesen, dass für $x = o$ ein Einbiegungspunkt A, Fig. 73, entspreche.

128) Letztlich betrachte man noch die Curve, deren Gleichung

$(y - b)^2 = x^3$.

Diese Gleichung giebt

$$y = b \pm x^{3/2};\ \frac{dy}{dx} = \pm \tfrac{3}{2} x^{1/2},\ \frac{d^2y}{dx^2} = \pm \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}};$$

macht man $x = o$, so hat man $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$, welches anzeigt, dass ein Einbiegungspunkt im Anfangspunkte Statt haben kann. Um zu wissen, ob dieser Punkt existire, mache man $x = h$, und substituire diesen Werth in den für $\frac{d^2y}{dx^2}$, dieser wird alsdann:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Wird nun $x = -h$, so wird der Werth für $\frac{d^2y}{dx^2}$ imaginär, wie auch der Werth von y; woraus erhellet, dass die Curve für negative Abscissen nicht existire, mithin auch kein Einbiegungspunkt, obgleich $\frac{d^2y}{dx^2}$ im Anfangspunkte unendlich ist.

Wir werden bald nachher sehen, dass der Anfangspunkt A, Fig. 74, zu einer andern Klasse von Punkten gehöre, die unter dem Namen *Wendungspunkte* begriffen sind, und wovon im folgenden Paragraph die Rede sein wird.

Von den Wendungspunkten.

129) Wenn eine Curve in ihrem Laufe einhält, und von neuem dieselbe Richtung nimmt, hat man einen Wendungspunkt; er ist von der *ersten Art*, wenn beide Aeste, Fig. 74, sich ihre convexen Seiten zukehren; und von der *zweiten Art*, wenn die hohlen Seiten concentrisch sind, wie, Fig. 75.

130) Die Curve hält also inne, weil jenseits des Wendungspunktes C die Abscisse Werthe annimmt, für welche die Ordinate imaginär wird, woraus zu vermuthen ist, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine Wurzelgrösse enthalte. Findet man also, bevor die Curve in ihrem Laufe stille hält, für $\frac{d^2y}{dx^2}$ zwei Werthe, wovon der eine das Zeichen von y, der andere das diesem entgegengesetzte hat; so zeigt dieses an, dass von zweien im Punkte C, Fig. 74, vereinigten Curvenästen der eine die convexe, der andere die concave Seite der Abscissenaxe zukehrt, an welchen Merkmalen man einen Wendungspunkt der ersten Art erkennen kann. Haben hingegen die beiden Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$ dasselbe Zeichen, so können die beiden in C, Fig. 75, vereinigten Aeste nur concentrisch sein, und man hat hier einen Wendungspunkt der zweiten Art.

131) Als erstes Beispiel wollen wir nun untersuchen, ob in der Curve der Gleichung

$$(y - x)^2 = x^9$$

sich Wendungspunkte vorfinden.

Aus der gegebenen Gleichung erhält man:

$$y = x \pm x^4 \sqrt{x} \;\ldots\ldots\; (61);$$

woraus erhellet, dass wenn x negativ ist, die Ordinate y imaginär wird; die Curve hält also im Anfangspunkte inne, wo $x = o$, und $y = o$ ist, woraus jedoch noch nicht folgt, dass hier ein Wendungspunkt sei; denn an diesem Punkte könnte ein immer auf derselben Seite concaver Bogen sein, wie diess im Scheitel der Hyperbel der Fall ist. Um nun zu erfahren, ob der Werth $x = o$ einem Wendungspunkte entspreche, so muss man den Differenzial-Coëfficienten der zweiten Ordnung beim Anfangspunkte kennen. Differenziirt man und dividirt nachher durch dx die Gleichung

$$y = x \pm x^{9/2}$$

so findet man:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \pm {}^9/_2\, x^{7/2} \; \ldots\ldots \; (62)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm {}^9/_2 \cdot {}^7/_2\, x^{5/2} = \pm {}^9/_2 \cdot {}^7/_2\, x^2 \sqrt{x}.$$

Um zu wissen, ob die Curve convex oder concav in dem Punkte sei, wo sie stille hält, vermehre man die Abscisse dieses Punktes um eine kleine Grösse h, indem man x = o + h, d. i. = h setzt, und diesen Werth in den von $\frac{d^2y}{dx^2}$ einführt; man erhält:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm {}^9/_2 \cdot {}^7/_2\, h^2 \sqrt{h}.$$

Diese zwei Werthe mit verschiedenen Zeichen lassen zwei Aeste erkennen, der eine AM, Fig. 76, kehrt seine Convexität der Axe der x, der andere AN seine Concavität derselben Axe, folglich ist der Anfangspunkt ein Wendungspunkt.

132) Es sei die Gleichung

$$(y - b)^2 = (x - a)^3;$$

woraus

$$y = b \pm \sqrt{(x - 2)^3} \; \ldots\ldots \; (63).$$

Macht man x = a, so ist y = b, werden aber die Werthe für x kleiner als a, so werden die für y imaginär; denn schreibt man, a — h für x, so ergiebt sich:

$$y = b \pm \sqrt{-h^3} = b \pm h \sqrt{-h}$$

ein unmöglicher Werth; die Curve hält also stille in dem Punkte C, Fig. 74, dessen Coordinaten a und b sind.

Um zu wissen, wie die Aeste jenseits des Punktes C sich ausbreiten, schreibe man a + h für x in den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$, und man erhält

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{4\sqrt{h}}.$$

Das obere Zeichen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ deutet auf einen Ast CM hin, der seine erhabene Seite der Axe der x kehrt; das untere Zeichen auf einen andern Ast CN, der seine hohle Seite der nämlichen Axe zuwendet. In C ist also ein Wendungspunkt der ersten Art.

133) Als drittes Beispiel betrachte man die Curve, deren Gleichung

$$y = ax^2 \pm bx^2 \sqrt{x}.$$

Wird $x = o$, so ist auch $y = o$; für ein negatives x wird y imaginär; die Curve bleibt also in ihrem Laufe am Anfangspunkte der Abscissen stehen. Will man nun untersuchen, was alsdann $\frac{d^2y}{dx^2}$ wird, schreibe man die Gleichung der Curve auf folgende Art:

$$y = ax^2 \pm bx^{5/2};$$

woraus man erhält:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax \pm {}^5/_2\ bx^{3/2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a \pm {}^5/_2 \cdot {}^3/_2\ b \sqrt{x};$$

giebt man dem x einen sehr kleinen positiven Werth h, so wird der Theil ${}^5/_2 \cdot {}^3/_2\ b \sqrt{h}$ des Werthes von $\frac{d^2y}{dx^2}$ kleiner als 2a, mithin die beiden Werthe für $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a \pm {}^5/_2 \cdot {}^3/_2\ b \sqrt{h}$$

positiv. Hieraus folgt, dass am Anfangspunkte zwei Curvenäste der Axe der x ihre Concavität zukehren; mithin giebt es am Anfangspunkte der Abscissen einen Wendungspunkt der zweiten Art.

134) Die Wendungspunkte gehören zu den *vielfachen* Punkten.

Von den vielfachen Punkten.

135) Man nennt jene Curvenpunkte *vielfache*, wo mehrere Curvenäste in einem einzigen Punkte sich vereinigen; *doppelt*, wenn er der Durchschnittspunkt zweier Aeste ist; *dreifach*, wenn drei Aeste sich in ihm schneiden; u. s. w.

136) Es sei A, Fig. 77, ein doppelter Punkt, gebildet durch die beiden Curvenäste AB und AC, an welche die Tangente AT und AT′ gezogen sind. Wird durch $F(x, y) = o$ die Gleichung der Curve dargestellt, und die Wurzelzeichen entfernt, so erhält das Differenzial folgender Form $Pdx + Qdy = o$ kein Wurzelzeichen mehr, weil durch Differenziation einer rationalen Funktion keines in sie eingeführt wird; es sind mithin P und Q rationale Grössen.

Hiernach giebt die vorige Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q} \;\ldots\ldots\; (64).$$

Da $\frac{dy}{dx}$ wegen den zwei Tangenten zwei verschiedene Werthe haben muss, so ist nothwendig $\frac{P}{Q}$ so zu bestimmen, dass dieser Bedingung Genüge geschehe, welches dann Statt findet, wenn $\frac{P}{Q}$ eine Wurzelgrösse enthält, welches unmöglich ist, da nach dem Vorhergehenden $\frac{P}{Q}$ rational ist. In diesem Falle muss uns die Algebra auf ein Resultat führen, wodurch dieser Widerspruch vermieden wird, das nur dann Statt findet, wenn $\frac{P}{Q}$ unter der Form $\frac{o}{o}$ erscheint. Es ist ja bekannt, dass $\frac{o}{o}$ das Symbol einer unbestimmten Grösse, folglich mehrerer Werthe fähig sei.

137) Dieser Lehrsatz wird auf folgende Art bewiesen: Man bezeichne für einen Augenblick durch α, α' die beiden Werthe der trigonometrischen Tangente der Curve am vielfachen Punkte, so müssen diese Werthe der Gleichung

$$P + \frac{Q\,dy}{dx} = o$$

Genüge leisten, und man erhält

$$P + Q\alpha = o;\ P + Q\alpha' = o.$$

Zieht man diese Gleichungen voneinander ab, so bleibt

$$Q\,(\alpha - \alpha') = o;$$

nun kann aber ein Faktor, der aus zwei ungleichen Grössen besteht, nicht Null sein, folglich ist $Q = o$, und daher die Gleichung $P + Q\alpha = o$ auf $P = o$ reducirt. Mit Hilfe dieser Werthe von P und Q wird die Gleichung $P + Q\frac{dy}{dx} = o$, oder vielmehr $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$.

138) Hätte man Statt eines Punktes, in dem zwei Curven-Aeste sich vereinigen, eine grössere Anzahl, so ist hinreichend, nur zwei davon zu betrachten, um zu beweisen, dass $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$ in dem Punkte, wo alle Aeste sich begegnen.

Man gelangt nicht so leicht zu demselben Schlusse, wenn mehrere Curven-Aeste eine gemeinschaftliche Tangente haben. Nichts desto weniger kann man in diesem Falle beweisen, dass $\frac{dy}{dx}$ sich unter der Form $\frac{o}{o}$ darstellen lasse. Da aber der Beweis dieses Lehrsatzes sich auf die Lehre von den Berührungspunkten der Curven gründet, so behalten wir uns vor, ihn in Art. 170 zu liefern, wo wir von den osculirenden Curven werden gesprochen haben.

139) Da der Beweis, Art. 137, sich darauf gründet, dass die ursprüngliche Gleichung erst von Wurzelgrössen befreit wurde, so kann man noch bemerken, dass wenn man sie differenziirte, ohne diese vorerst entfernt zu haben, man eine Gleichung erhalten könnte, die zwar auf vielfache Punkte sich bezöge, ohne jedoch $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$ zu liefern.

So z. B. gehört, Art. 131, die Gleichung

$$y = x \pm x^{9/2}$$

hieher, welche zwar im Anfangspunkte einen doppelten Punkt hat; macht man aber $x = o$, so giebt die Gleichung (62) $\frac{dy}{dx} = 1$.

140) Hier wollen wir noch eine Bemerkung beifügen, nämlich, obgleich auch die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$ für einen vielfachen Punkt Statt findet, es keine nothwendige Folge sei, dass sie nur für einen Punkt dieser Art bestehen könne, da nach dem vorhergehenden Beweise diese Eigenschaft ausschliesslich ihnen angehört. Das Ganze, was man daraus herleiten kann, ist, dass die Reduction des Ausdrucks $\frac{dy}{dx}$ auf $\frac{o}{o}$ einzig und allein anzeige, es könne ein vielfacher Punkt vorhanden sein.

141) Vermittelst des Vorhergehenden kann man erkennen, ob es in einer durch eine Gleichung bestimmten Curve vielfache Punkte gebe. Es sei U diese Gleichung; hieraus leitet man ab $Pdx + Qdy = o$, wo zu untersuchen ist, ob dieselben Werthe für x und y zu gleicher Zeit der gegebenen und den Gleichungen $P = o$, $Q = o$ Genüge leisten. Diess ist alsdann ein Zeichen, dass diese Werthe von x und y einem vielfachen Punkte angehören können; wird nun die Curve in der Gegend dieses Punktes discutirt, so wird man finden, ob er ein vielfacher sei.

Von den beigeordneten Punkten.

142) Betrachten wir nun eine Curve von der Beschaffenheit, dass in dem Theile, wo ihre Coordinaten imaginär sind, nur zwei reelle Coordinaten vorhanden seien, welche dann die Coordinaten eines Punktes sein werden, der ganz von der Curve getrennt ist, und desswegen *beigeordneter Punkt* heisst.

Es sei $y = fx$ die Gleichung einer Curve, die einen beigeordneten Punkt hat, und a, b die Coordinaten dieses Punktes; so müssen zum wenigsten in der Nähe dieses Punktes die Coordinaten imaginär sein, sonst wäre der Punkt kein beigeordneter; nimmt man also an, dass die Abscisse a um eine kleine Grösse h wachse, so muss die andere Ordinate $a + h$, welche die entsprechende ist, imaginär sein; nun aber allgemein nach dem Taylorschen Lehrsatze:

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots;$$

wird $x = a$ gesetzt, so muss auch die correspondirende Ordinate $y = b$ sein; folglich wenn y in b verwandelt, und durch $\left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right), \ldots$ bezeichnet wird, was die Differenzial-Coefficienten bei dieser Annahme werden, hat man:

$$f(a+h) = b + \left(\frac{dy}{dx}\right) h + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \frac{h^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

Damit nun $f(a + h)$ eine imaginäre Grösse werde, muss wenigstens einer von den Ausdrücken $\left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right), \ldots$ d. i. Kraft dessen, dass $x = a + h$, muss einer der Differenzial-Coëfficienten imaginär werden; ist diese Bedingung erfüllt, so hat die Curve einen beigeordneten Punkt.

Wäre z. B. die Gleichung

$$y = \pm (x + \quad) \sqrt{x}$$

gegeben, so findet man durch Differenziation:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \left(\frac{3}{2} \sqrt{x} + \frac{b}{2\sqrt{x}} \right).$$

Dieser Werth wird imaginär, wenn $x = -b$, also $y = 0$. Hieraus lässt sich vermuthen, dass der Punkt A, Fig. 78, dessen Coordinaten $x = -b$, $y = 0$ ein beigeordneter Punkt ist; man erkennt bald, ob dieser Punkt wirklich ein beigeordneter sei, wenn man die Abscisse $-b$ um eine Grösse kleiner als b vermehrt, und vermindert; man findet, dass in beiden Fällen y imaginär wird, diess ist ein Zeichen, dass der untersuchte Punkt ein beigeordneter ist.

143) Das Dasein beigeordneter Punkte ergiebt sich wie bei vielfachen Punkten, wenn der Differenzial-Coëfficient $\frac{dy}{dx}$ in $\frac{0}{0}$ verwandelt wird.

Wird nämlich die Gleichung

$$Q \frac{dy}{dx} + P = 0$$

differenziirt, und dann durch dx dividirt, so ergiebt sich

$$Q \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dQ}{dx} + \frac{dP}{dx};$$

man sieht, dass das Glied; welches mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ behaftet ist, zum Coëfficienten die Grösse Q hat; wird aufs neue differenziirt, so ist wiederum Q der Coëfficient von $\frac{d^3y}{dx^3}$, so dass man bei dem Coëfficienten der n^{ten} Ordnung ein Resultat habe von der Form:

$$Q \frac{d^ny}{dx^n} + R = 0 \; \ldots\ldots \; (65),$$

Es giebt zum wenigsten einen unter den Differenzial-Coëfficienten, welcher für einen Werth von x imaginär wird, mithin eine Wurzelgrösse enthält. Bezeich-

net man diesen Coëfficienten durch $\frac{d^n y}{dx^n}$, so muss die Funktion von x, welche dadurch vorgestellt ist, mehr als einen Werth haben. Diess ist hinreichend, um daraus nach Art. 137. $Q = o$ abzuleiten; desshalb wird $P + Q\frac{dy}{dx} = o$ auf $P = o$ reducirt, folglich muss man $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$ haben.

Von den berührenden Curven.

144) Fs seien $x = \varphi x$, und $y = Fx$ die Gleichungen zweier Curven, die sich im Punkte M, Fig. 24, begegnen, dessen Coordinaten $AP = x'$, $PM = y'$ sind; man hat daher für diesen Punkt

$$\varphi x' = Fx'.$$

Nimmt man an, x' werde $x' + h$, so geben die vorstehenden Gleichungen:

$$M'P' = \varphi(x' + h) = \varphi x' + \frac{d\varphi x'}{dx'} + \frac{d^2\varphi x'^2}{dx'^2}\,\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

$$M''P'' = F(x' + h) = Fx' + \frac{dFx'}{dx'}\,h + \frac{d^2Fx'^2}{dx'^2}\,\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots \quad (67).$$

Sind alle correspondirenden Glieder dieser Reihen identisch, so fallen die Curven zusammen; wenn nur $Fx' = \varphi x'$, so haben die Curven, wie wir schon gesehen haben, nur einen Punkt M gemein; ist ausser $Fx' = \varphi x'$ auch $\frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\varphi x'}{dx'}$, so nähern sich die Curven immer mehr; und noch stärker, wenn überdiess auch $\frac{d^2Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}$, u. s. w. Denn offenbar wird der Unterschied zwischen $M''P''$ und $M'P'$ um so kleiner, je mehr Glieder in obigen Reihen einander gleich sind.

Es seien a, b, c. . . . die in der Gleichung $y = Fx$ vorkommenden Constanten, welchen man, ohne die Natur der Curve zu ändern, beliebige Werthe beilegen

kann. Wäre z. B. die Gleichung für die Ellipse $y^2 = mx + nx^2$ gegeben, so hört die Gleichung nicht auf, einer Ellipse anzugehören, welchen Werth auch die Constanten m, n haben mögen, indem die Curve immer dieselbe Form beibehält, vorausgesetzt, dass m und n sich nur in Hinsicht ihrer Grösse, nicht aber ihrer Form ändern, und nicht Null sind. Nach dieser Bemerkung kann man die Constanten als willkührliche Grössen ansehen, welche in den Gleichungen

$$y' = Fx'; \frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\varphi x'}{dx'}; \frac{d^2Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}; \ldots$$

sich vorfinden; nimmt man so viele von diesen Gleichungen, als Constanten vorhanden sind, so wird man diese Constanten so bestimmen, dass sie den Gleichungen Genüge leisten.

Enthielte z. B. die Gleichung $y = Fx$ nur drei Constanten a, b, c, so setze man:

$$Fx' = \varphi x'; \frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\varphi x'}{dx'}; \frac{d^2Fx,}{dx'^2} = \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}.$$

Aus diesen Gleichungen leite man die Werthe für a, b, c in Funktionen von x', y', $\frac{dy'}{dx'}$, ... ab, und führe sie in die Gleichung $y = Fx$ ein, welche alsdann die Eigenschaft haben wird, dass wenn man darin $x' + h$ für x setzt, die Gleichung (67), welche man mit Hilfe des Taylorschen Lehrsatzes erhält, die drei ersten Glieder des zweiten Theils mit den drei ersten Gliedern des zweiten Theils der Gleichung (66) gleich haben werde.

Was wir von einer Gleichung, die nur drei Constanten enthält, gesagt haben, lässt sich auch auf eine Gleichung anwenden, welche eine grössere Anzahl derselben enthält.

145) Es sei z. B. die Gleichung $y = Fx$, welche einer geraden Linie angehören soll. Diese Gleichung $y = Fx$ wird also durch folgende ersetzt:

$$y = ax + b \ldots\ldots (68).$$

Die Bedingungsgleichungen, derer man zur Elimination der Constanten a, b, bedarf, sind:

$$\varphi x' = ax' + b; \ \frac{d\varphi x'}{dx'} = a, \ldots . (69)$$

und da $\varphi x'$ die Ordinate in M dieser Curve, derer Gleichung $y = \varphi x$, bezeichnet, und x' dem y' entspricht, so kann man $\varphi x'$ für y' setzen, alsdann ändern sich die Gleichungen (69) in folgende um:

$$y' = ax' + b; \ \frac{dy}{dx} = a;$$

wird a eliminirt, so ist

$$y' = \frac{dy'}{dx'} x' + b.$$

Substituirt man den Werth von b aus dieser Gleichung und den von a in die Gleichung (68) der Geraden, so geht sie in folgende über:

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x') \ldots . (70);$$

diess ist offenbar die Gleichung einer Tangente an den Punkt M, Fig. 5, dessen Coordinaten x' und y' sind. Wir werden bald sehen, warum diese Gerade MT bei M eine Tangente ist.

146) Wir wollen wieder zur vorhergehenden Theorie zurückkehren, und die Curven blos durch ihre Gleichungen benennen.

Wären x' und y' die Coordinaten des den Curven der Gleichungen $y = \varphi x$, und $y = Fx$ allein gemeinschaftlichen Punktes, so hätte man die Bedingungsgleichung $Fx' = \varphi x'$; bestimmte man aber zwei Constanten der Gleichung $y = Fx$ vermittelst der Bedingungen $Fx' = \varphi x'$, und $\frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\varphi x'}{dx'}$, so würden die Curven anfangen, sich zu nähern.

Man bezeichne durch $y = fx$, was $y = Fx$ wird, wenn darin die Werthe der beiden Constanten eingeführt werden, alsdann heisst die Curve $y = fx$ eine *Berührungs-Curve der ersten Ordnung;* und wenn man

vermittelst der Werthe, welche man den Constanten beilegt, drei von ihnen aus der Gleichung $y = Fx$ durch folgende Gleichungen

$$Fx' = \varphi x'; \frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\varphi x'}{dx'}; \frac{d^2Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2},$$

eliminirt, und durch ψx anzeigt, was Fx nach dieser Substitution wird; so ist die Curve $y = \psi x$ eine *Berührungs-Curve der zweiten Ordnung* der Curve $y = \varphi x$, derer sie sich noch mehr nähert, u. s. w.; so dass man für eine Berührungs-Curve der n^{ten} Ordnung folgende Gleichungen haben wird:

$$Fx' = \varphi x'; \frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\varphi x'}{dx'}; \frac{d^2Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}; \dots$$

$$\frac{d^nFx'}{dx'^n} = \frac{d^n\varphi x'}{dx'^n} \dots\dots (72).$$

147) Wir wollen nun beweissen, dass von zwei Berührungs-Curven, welche man erhalten hat, indem man die Constanten der nämlichen Gleichung variiren liess, diejenige einer niederern Ordnung nicht zwischen der andern und der Curve, an welche die Berührungs-Curven gezogen sind, durchgehen könne.

Es sei z. B. MB, Fig. 24, die Curve $y = \varphi x$, und MC ihre berührende Curve $y = \psi x$ der zweiten Ordnung; es soll bewiesen werden, dass die Berührende $y = fx$ der ersten Ordnung nicht zwischen den Curven MB, MC, durchgehen könne.

Wird $x' + h$ an die Stelle von x in diesen Gleichungen gesetzt, so erhält man:

$$P'M \text{ oder } \varphi(x' + h) = \varphi x' + \frac{d\varphi x'}{dx'} h + \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3\varphi x'}{dx'^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

$$P''M'' \text{ oder } \psi(x' + h) = \psi x' + \frac{d\psi x'}{dx'} h + \frac{d^2\psi x'}{dx'^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3\psi x'}{dx'^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

$$f(x'+h) = fx' + \frac{dfx'}{dx'} h + \frac{d^2fx'}{dx'^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3fx'}{dx'^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots;$$

wenn die Curve $y = \psi x$ eine Berührende der zweiten Ordnung zu $y = \varphi x$ ist, so muss man haben:

$$\psi x' = \varphi x'; \quad \frac{d\psi x'}{dx'} = \frac{d\varphi x'}{dx'}; \quad \frac{d^2\psi x'}{dx'^2} = \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}.$$

Ist auf der andern Seite $y = fx$ eine Berührende der ersten Ordnung zu $y = \varphi x$, so hat man auch:

$$fx' = \varphi x'; \quad \frac{dfx'}{dx'} = \frac{d\varphi x'}{dx'};$$

und also vermöge dieser Gleichugen:

$$\varphi x' = \psi x' = fx';$$

$$\frac{d\varphi x'}{dx'} = \frac{d\psi x'}{dx'} = \frac{dfx'}{dx'};$$

und allein

$$\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} = \frac{d^2\psi x'}{dx'^2}.$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$\varphi x' + \frac{d\varphi x'}{dx'} h = K; \quad \tfrac{1}{2} \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} = V;$$

so können die drei obigen Reihen unter folgende Form gebracht werden:

$$P'M' \text{ oder } \varphi(x'+h) = K + Vh^2 + \frac{d^3\varphi x'}{dx'^3} \cdot \frac{h^3}{2.3} + \ldots$$

$$P'M'' \text{ oder } \psi(x'+h) = K + Vh^2 + \frac{d^3\psi x'}{dx'^3} \cdot \frac{h^3}{2.3} + \ldots$$

$$f(x'+h) = K + \frac{d^2fx'}{dx'^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{d^3fx'}{dx'^3} \cdot \frac{h^3}{2.3} + \ldots$$

Bemerkt man, dass alle Glieder von demjenigen angerechnet, welches mit h^3 vervielfacht ist, den gemeinschaftlichen Faktor h^3 haben, so kann man annehmen:

$$\frac{d^3\varphi x'}{dx'^3} \cdot \frac{h^3}{2.3} + \ldots = Mh^3;$$

macht man ähnliche Reductionen in den übrigen Gleichungen, so wird man haben:

$$\varphi(x'+h) = K + Vh^2 + Mh^3,$$

$$\psi(x' + h) = K + Vh^2 + Nh^3,$$
$$f(x' + h) = K + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{d^2fx'}{dx'^2} h^2 + Ph^3.$$

Da die Curven $y = fx$ und $y = \psi x$ Berührungscurven die eine der ersten, die andere der zweiten Ordnung sind, so weicht V nothwendig um $\tfrac{1}{2} \frac{d^2fx'}{dx'^2}$ ab. Man kann also nur zwei Bedingungen setzen, entweder

$$V < \tfrac{1}{2} \cdot \frac{d^2fx'}{dx'^2},$$

oder

$$V > \tfrac{1}{2} \cdot \frac{d^2fx'}{dx'^2}.$$

Wenn V kleiner als $\tfrac{1}{2} \cdot \frac{d^2fx'}{dx'^2}$, so bezeichne man durch Z den Ueberschuss von $\tfrac{1}{2} \cdot \frac{d^2fx'}{dx'^2}$ über V, und man hat

$$V + Z = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{d^2fx'}{dx'^2};$$

wenn hingegen V den Werth $\tfrac{1}{2} \cdot \frac{d^2fx'}{dx'^2}$ übersteigt, so ist die Grösse Z nothwendigerweise negativ.

Wird dieser Werth von $\tfrac{1}{2} \cdot \frac{d^2fx'}{dx'^2}$ in den für $f(x' + h)$ eingeführt, und bemerkt, dass h^2 ein gemeinschaftlicher Faktor ist, so gehen die drei obigen Reihen in folgende über:

$$\varphi(x' + h) = K + (V + Mh) h^2$$
$$\psi(x' + h) = K + (V + Nh) h^2$$
$$f(x' + h) = K + (V + Z + Ph) h^2.$$

Nimmt man h sehr klein an, so ist's möglich, dass die von h unabhängige Grösse Z die Ausdrücke Mh und Nh, die sich zu Null hinneigen, übersteige; ist also Z positiv, so übertrifft $f(x' + h)$ die Werthe $\varphi(x' + h)$,

und ψ (x' + h). In diesem Falle hat man also f (x' + h), oder P'M'', Fig. 24, grösser als P'M', und P'M''; diess zeigt an, dass die Curve y = fx, durch MM''' bezeichnet, nicht zwischen der andern durchgehen kann.

Wenn hingegen Z negativ ist, so hat man f (x' + h), oder P'M^{IV} kleiner als P'M' und P'M''. Die Curve MM^{IV}, welche sich alsdann am meisten der Axe der Abscisse nähert, kann nicht zwischen den beiden andern eingeschlossen sein

148) es lässt sich nun leicht erklären, warum die Gerade, Fig. 5, welche, Art. 145, eine Berührende der ersten Ordnung genannt wurde, eine Tangente der Curve ist; denn aus unserm bisherigen Vortrage erhellet, dass zwischen ihr und der Curve keine andere Gerade gehen kann, welche die Eigenschaft der Tangente habe. Man sagt die Tangente hat einen Berührungspunkt der ersten Ordnung mit der Curve, und überhaupt eine berührende Curve von der Ordnung n einen Berührungspunkt derselben Ordnung mit der Curve gemein, zu welcher sie eine Berührende ist. Hat man also folgende Gleichungen zwischen zwei Curven:

$$\varphi x' = Fx'; \frac{d\varphi x'}{dx'} = \frac{dFx'}{dx'}; \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} = \frac{d^2Fx'}{dx'^2},$$

so haben diese Curven unter sich einen Berührungspunkt der zweiten Ordnung; und der dritten, wenn ausser obigen Gleichungen, auch noch folgende Statt findet:

$$\frac{d^3\varphi x'}{dx'^3} = \frac{d^3Fx'}{dx'^3}, \text{ u. s. w.}$$

149) Die Gleichung für den Kreis

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \gamma^2$$

enthält drei Constanten; wir können also jenen Kreis bestimmen, welcher mit der Curve MN, Fig. 25, deren Gleichung gegeben ist, einen Berührungspunkt der zweiten Ordnung gemein hat. Es seien x' und y' die Coordinaten für den Punkt M der Peripherie des Kreises.

Der Werth für y' wird durch folgende Gleichung geben:

$$(y' - \beta)^2 + (x' - \alpha)^2 = \gamma^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (73)$$

und muss Fx' in den Berührungs-Gleichungen ersetzen, welche sind:

$$\varphi x' = Fx'; \; \frac{d\varphi x'}{dx'} = \frac{dFx'}{dx'}; \; \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} = \frac{d^2Fx'}{dx'^2};$$

erkennt man zugleich x und y für die Coordinaten der Curve $y = \varphi x$ im Berührungspunkte, so gehen die vorigen Gleichungen in folgende über:

$$y = y'; \; \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}; \; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (74)$$

worin man für y', $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, ihre Werthe aus (73) und die Werthe der Ordnungen der Differenziale setzen muss, nämlich:

$$(y' - \beta)\frac{dy'}{dx'} + x' - \alpha = o \;.\;.\;.\;.\; (75),$$

$$(y' - \beta)\frac{d^2y'}{dx'^2} + \frac{dy'^2}{dx'^2} + 1 = o \;.\;.\;.\; (76).$$

Werden nun diese Werthe von y', $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ aus den Gleichungen (73), (75), (76) in die Gleichungen (74) eingeführt, so wird dadurch nichts anders angedeutet, als diese Grössen aus den Gleichungen (73), (74), (75), (76) zu eliminiren, oder was dasselbe ist, in den Gleichungen (73), (75) und (76) die Accente weglassen, mit der Bemerkung aber, dass wenn

$y = y'$, auch $x = x'$.

Vernachlässigt man also die Accente, so erhält man:

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \gamma^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (77)$$

$$(y - \beta)\frac{dy}{dx} + x - \alpha = o \;.\;.\;.\;.\;.\; (78)$$

$$(y - \beta)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} + 1 = o \;.\;.\;.\;.\; (79).$$

Aus dieser letzten Gleichung zieht man;

$$y - \beta = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}} \ldots\ldots (80).$$

Schreibt man diesen Werth in die Gleichung (78), so erhält man:

$$x - \alpha = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx} \ldots\ldots (81).$$

Werden die Werthe von $y - \beta$, und $x - \alpha$ in (77) eingeführt, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} + \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} \cdot \frac{dy^2}{dx^2} = \gamma^2.$$

Trennt man in dem Zähler den gemeinschaftlichen Faktor, so ist

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = \gamma^2;$$

oder

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = \gamma^2;$$

zieht man die Quadratwurzel aus, so ist

$$\pm \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \gamma.$$

150) Das doppelte Zeichen bezieht sich auf die Lage von γ; kehrt nun die Curve ihre hohle Seite der Axe der x, so ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ; damit nun γ sich positiv bestimmen lasse, so wollen wir γ negativ nehmen, und die Gleichung so schreiben:

$$\gamma = - \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \ldots\ldots (82).$$

Denn wenn die Curve ihre hohle Seite der Axe der Abscissen kehrt, so nimmt $\frac{d^2y}{dx^2}$ die Stelle einer negativen Grösse ein, durch deren Substitution der Werth von γ positiv wird.

151) Man hat diesem Kreise, den wir so eben betrachtet haben, den Namen *Krümmungskreis* gegeben, und seinen Radius *Krümmungshalbmesser* genannt. Um nun den Krümmungshalbmesser zu erhalten, bedarf man nur der Gleichung der Curve, aus welcher man die Differenzial-Coëfficienten entwickelt, und in die Formel (82) einführt.

Soll aber die Curve ihre erhabene Seite der Abscissen-Axe zukehren, so setze man dem Werthe von γ das positive Zeichen vor.

152) Bisweilen schreibt man den Werth von γ auf folgende Art:

$$\gamma = - \frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx\, d^2y}$$

welche Form sich leicht aus der Gleichung (82) herleiten lässt. Denn bringt man die beiden eingeschossenen Glieder unter einerlei Benennung, und bemerkt, dass die Potenz $^3/_2$ von dx^2, dx^3 ist, so erhält man:

$$\gamma = - \frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx^3 \frac{d^2y}{dx^2}} = - \frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx\, d^2y}.$$

153) Um von der Formel (82) eine Anwendung zu zeigen, wollen wir den Krümmungshalbmesser der Parabel NAM, Fig. 26, suchen, derer Gleichung $x^2 = my$; wir finden:

$$2x\,dx = m\,dy;\ \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{m};\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{m};$$

also

$$\gamma = \frac{\left(1 + \frac{4x^2}{m^2}\right)^{3/2}}{\frac{2}{m}} = \frac{\left[\frac{4}{m^2}\left(\frac{m^2}{4} + x^2\right)\right]^{3/2}}{\frac{2}{m}}.$$

Werden beide Faktoren zur Potenz $^3/_2$ erhoben, so hat man:

$$\gamma = \frac{8}{m^3}\,\frac{\left(\frac{m^2}{4} + x^2\right)^{3/2}}{\frac{2}{m}} = \frac{\left(\frac{m^2}{4} + x^2\right)^{3/2}}{\frac{m^2}{4}} \quad \ldots\ (83).$$

Nun aber ist der Ausdruck für die Normale der Parabel . , . $\left(\frac{m^2}{4} + x^2\right)^{1/2}$; also der *Krümmungshalbmesser der Parabel gleich dem Cubus der Normale, dividirt durch das Quadrat des halben Parameters.*

154) Der Krümmungskreis kann zur Bestimmung der Krümmung der Curve in einem Punkte M, Fig. 25, dienen. Denn beschreibt man in diesem Punkte M mit dem Krümmungshalbmesser einen sehr kleinen Bogen ML, so kann dieser kleine Kreisbogen auch als Bogen der Curve, von der er um ein sehr Geringes verschieden ist, angesehen werden; je grösser also die Krümmung des Bogens ML, desto kleiner ist sein Halbmesser. Hieraus folgt, dass man aus dem Ab- oder Zunehmen des Krümmungshalbmessers erkennen kann, ob die Krümmung der Curve grösser oder kleiner werde.

Betrachtet man z. B. die Gleichung (83), für den

Krümmungshalbmesser der Parabel, so sieht man bald ein, dass im Scheitel der Curve, wo $x = o$, $\gamma = \frac{m}{2}$; da aber γ wächst, wenn x nach und nach vermehrt wird; so folgt, dass die Krümmung der Parabel abnimmt, wenn sie sich vom Scheitel entfernt.

155) Da $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente bezeichnet, welche die Tangente in M, Fig. 27, mit der Axe der x bildet, so ist die Gleichung für die Normale, welche durch einen Punkt gehen soll, dessen Coordinaten α, β sind,

$$y - \beta = - \frac{dx}{dy} (x - \alpha).$$

Da diese Gleichung dieselbe ist, wie (78), wo α und β die Coordinaten des Mittelpunktes des Krümmungshalbmessers sind, so sieht man leicht ein, dass der Halbmesser dieses Kreises nichts anders ist, als die Normale der Curve.

156) Lässt man nun durch alle Punkte der Curve $MM'M''$, Fig. 28, die Krümmungshalbmesser MO, $M'O'$, $M''O''$, . . . gehen, so erhält man dadurch eine Reihe von Punkten O, O', O'', . . . die jedoch einem gewissen Gesetze unterworfen sind *); diess reicht schon hin, uns zu berechtigen, ihrem Zusammenhange den Namen *Curve* beizulegen, ohne aber etwas über die Natur dieser neuen Curve zu sagen, welche die *Evolute der Curve* $MM'M''$ *heisst*, diese aber in Beziehung der Evolute, *evolvirende Curve.*

157) Geht man von einem Punkte der Evolute zum andern über, so variiren nicht allein x und y, sondern auch α, β und zugleich γ. Denn da α und β im Allge-

*) Es liegt in der Gleichung der Curve $MM'M''$ verborgen, weil aus der gegebenen Curve die Lage dieser Punkte folgt. (Anmerk. d. Verf.)

meinen die Coordinaten des Krümmungskreises sind, und die Evolute durch den Zusammenhang dieser Mittelpunkte gebildet ist, so folgt daraus, dass α und β die Coordinaten der Evolute sind, welche von einem Punkte der Curve zum andern variiren müssen.

Eben so verhält es sich mit γ, welches der Halbmesser des Krümmungskreises ist, der alsdann die Entfernung irgend eines Punktes der Evolute von einem Punkte der Evolvirenden, von woaus γ gezogen ist, vorstellt. Differenziirt man daher die Gleichung (78) in Hinsicht aller Grössen *), nnd dividirt alsdann durch dx, so erhält man:

$$(y - \beta)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d\beta}{dx} + 1 - \frac{d\alpha}{dx} = o;$$

wird hievon (79) abgezählt, so bleibt:

$$-\frac{dy}{dx}\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dx} = o;$$

hieraus ergiebt sich:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\beta}{dx}} = -\frac{d\alpha}{dx} \times \frac{1}{\frac{d\beta}{dx}};$$

allein nach Art. 67:

$$\frac{1}{\frac{d\beta}{dx}} = \frac{dx}{d\beta},$$

*) Man kann die Gleichung $(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \gamma^2$ und ihre dirivirten auf keine andere Weise differenziiren, obgleich es den Anschein hat, als hätte man anders verfahren können, da man die Gleichnngen (75) und (76) aus der Gleichung (73) herleite. Ich antworte, dass, da zwei Constanten in der Gleichung (73) enthalten sind, wir sie unter der Bedingung bestimmt haben, vermöge welcher die Funktionen durch die ersten Theile der Gleichungen (75) und (76) bezeichnet, Null sind. Ohne dieses wären wir nicht berechtigt gewesen, aus dem Dasein der Gleichung (73) auf das Dasein von (75) und (76) zu schliessen.

(Anmerk. d. Verf.)

also

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d\alpha}{dx} \times \frac{dx}{d\beta}.$$

und folglich, Art. 24,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d\alpha}{d\beta};$$

führt man diesen Werth von $\frac{dy}{dx}$ in (78) ein, so wird man erhalten:

$$y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x - \alpha) \quad . \; . \; . \; . \; (84).$$

158) Man hat, Art. 155, gesehen, dass die Gleichung

$$y - \beta = -\frac{dx}{dy}(x - \alpha)$$

für jenen Krümmungshalbmesser war, der durch den Punkt gieng, dessen Coordinaten x und y sind. Ersetzt man $-\frac{dx}{dy}$ durch $\frac{d\beta}{d\alpha}$, so bleibt die Gleichung des nämlichen Halbmessers. Da aber die Gleichung (84) für eine Tangente am Punkte der Evolute ist, dessen Coordinaten α und β sind *); so folgt, dass der Krümmungshalbmesser die Evolute berührt.

159) Da wir im folgenden Beweise des Differenzials eines Curven-Bogens bedürfen, so wollen wir dieses Differenzial vorerst bestimmen.

Es sei AP = x, Fig. 31, eine Abscisse, die um PP' = h wächst, zieht man MO parallel zur Abscissenaxe, so ist offenbar;

$$\text{Sehne } MM' = \sqrt{MO^2 + M'O^2} = \sqrt{h^2 + M'O^2};$$

*) Man bemerke im Allgemeinen, wenn α und β Coordinaten irgend eines Punktes der Evolute sind, so wird die Gleichung der Evolute $\beta = f\alpha$ sein, $\frac{d\beta}{d\alpha}$ stellt also, nach Art. 71, den Winkel vor, welchen die Tangente im Punkte (α, β) mit der Abscissenaxe bildet.

es ist aber

$$M'O = f(x+h) - fx = \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \ldots;$$

also, wenn dieser Werth in den Ausdruck für MM′ eingeführt, und durch A, B, . . . die Coëfficienten von h^3, h^4, . . . bezeichnet werden,

$$MM' = \sqrt{h^2 + \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + Ah^3 + Bh^4 + \ldots}$$

$$= \sqrt{h^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) + Ah^3 + Bh^4 + \ldots}$$

mithin:

$$\frac{MM'}{h} = \sqrt{1 + \frac{d^2y}{dx^2} + Ah + Bh^2 + \ldots}$$

Im Falle der Endgränze fällt die Sehne mit dem Bogen, welcher durch s bezeichnet werden soll, zusammen, so dass

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

hieraus vermittelst Multiplication durch dx:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

160) Ebenso hat man für die Evolute, deren Coordinaten α und β sind,

$$ds = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}.$$

161) Differenziirt man nun die Gleichung (77) in Hinsicht aller Buchstaben, so findet man:

$$(y-\beta)(dy-d\beta) + (x-\alpha)(dx-d\alpha) = \gamma d\gamma.$$

Die Gleichung (78) liefert:

$$(y-\beta)\,dy + (x-\alpha)\,dx = o;$$

wird dieses Resultat von der obigen Gleichung abgezogen, so bleibt:

$$-(y-\beta)\,d\beta - (x-\alpha)\,d\alpha = \gamma d\gamma \ldots (85).$$

Wird in dieser Gleichung (85) und in (77) der Werth von $y-\beta$ aus (84) substituirt, so erhält man diese beiden Gleichungen:

$$-\frac{d\beta^2}{d\alpha}(x-\alpha)-(x-\alpha)\,d\alpha = \gamma d\gamma,$$

$$\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}(x-\alpha)^2+(x-\alpha)^2 = \gamma^2.$$

Trennt man den gemeinschaftlichen Faktor $x - \alpha$, und zieht aus der zweiten Gleichung die Quadratwurzel, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$-(x-\alpha)\frac{d\beta^2+d\alpha^2}{d\alpha} = \gamma d\gamma,$$

$$(x-\alpha)\frac{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}}{d\alpha} = \gamma;$$

wird die erste dieser Gleichungen durch die zweite dividirt, so erhält man:

$$d\gamma = -\sqrt{d\beta^2+d\alpha^2}.$$

Nennt man s irgend einen Bogen der Evolute, so hat man nach Art. 160,

$$ds = \sqrt{d\beta^2+d\alpha^2}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der unmittelbar vorhergehenden, so ergiebt sich:

$$d\gamma = -ds, \text{ oder } d(\gamma+s) = 0;$$

und da jede Funktion, derer Differenzial Null ist, als eine Constante angesehen werden kann, so hat man

$$\gamma + s = Const.$$

Wenn also der Krümmungshalbmesser wächst, muss der Bogen s verhältnissmässig abnehmen, oder mit andern Worten, *der Krümungshalbmesser variirt durch die nämlichen Differenzen, wie die Evolute.*

162) Es sei, Fig. 29, $MO = \gamma$, $OB = s$; $M'O' = \gamma'$, $O'B' = s'$; man hat also für den Krümmungshalbmesser:

$$\gamma + s = Constante.$$

Oder

$$MO + Bog.\ OB = Constante \quad . \ . \ . \ (86).$$

Eben so führt der Krümmungshalbmesser $M'O'$ zu folgender Gleichung:

$$\gamma' + s' = Constante.$$

oder

$$M'O' + \text{Bog. } O'B = \textit{Constante} \quad . \; . \; . \; (87).$$

Da man in beiden Gleichungen (86) und (87) jenseits des Gleichheitszeichens dieselbe Constante hat, kann man folgern:

$$M'O' + \text{Bog. } O'B = MO + \text{Bog. } OB;$$

daher

$$M'O' - MO = \text{Bog. } OB - \text{Bog. } O'B = \text{Bog. } OO'$$

d. i. *der Unterschied zwischen zwei Krümmungshalbmessern ist gleich dem Bogen, welchen sie einschliessen.*

163) Hieraus folgt, dass wenn man um die Evolute OB, Fig. 29, einen Faden legt, der berührend ausläuft, im Punkte M der Evolvirenden MC befestigt ist, und man ihn abwickelt, dass er jedoch immer angespannt bleibe, so beschreibt das Ende M bei dieser Abwicklung die *Evolvirende* MC *). Denn nimmt man an, dass er bei der Abwicklung in die Lage M′O′ gekommen sei, so ist er um OO′ gewachsen, und folglich gleich der Länge des Krümmungshalbmessers, der durch den Punkt O′ geht, das Ende M′ des Fadens liegt mithin auf der Evolvirenden.

164) Die Gleichung der Evolute lässt sich auf folgende Art finden.

1°. Entwickle man aus der Gleichung der Curve die Werthe für y, und jene der Differenzial-Coëfficienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$

2°. Man substituire diese Werthe in die Gleichungen (78) und (79), wodurch man zwei neue Gleichungen erhält, die nur noch Funktionen von x sind.

*) Herr *Eytelwein* (Handbuch der Statik fester Körper, tom. III. pag. 50) schlägt vor, die Linie, um welche der Faden gewickelt ist (developpée) *Umwicklungslinie*, und diejenige, welche durch Abwicklung erzeugt wird (developante) *Abwicklungslinie* zu nennen.

(Anmerk. d. Uebers.)

3° Eliminire man aus diesen Gleichungen x, so gelangt man zu einer Gleichung zwischen α und β, welche die Gleichung der Evolute sein wird.

165) Man bestimme nun nach diesem Verfahren die Evolute der Parabel, derer Gleichung $x^2 = my$. Durch Differenziation erhält man:

$$2xdx = mdy,$$

und hieraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{m}; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{m}.$$

Setzt man diese Werthe für y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die Gleichungen (78) und (79), so gehen sie in folgende über:

$$\left(\frac{x^2}{m} - \beta\right)\frac{2x}{m} + x - \alpha = o \ldots (88),$$

$$\left(\frac{x^2}{m} - \beta\right)\frac{2}{m} + \frac{4x^2}{m^2} + 1 = o \ldots (89).$$

Wird (88) von (89) abgezählt, und durch x vervielfacht, so hat man:

$$\alpha + \frac{4x^3}{m^2} = o \ldots . (90).$$

Vervielfacht man hingegen (89) durch m^2, und reducirt, so ist:

$$6x^2 - 2m\beta + m^2 = o,$$

hieraus erhält man:

$$\beta = \frac{3x^2}{m} + \frac{m}{2} \ldots . (91).$$

Eliminirt man x aus den Gleichungen (90) und (91), so erhält man die Gleichung der Evolute.

Bevor wir dieses Geschäft vornehmen, wollen wir bewirken, dass für den Anfangspunkt, wo $x = o$, die Gleichungen (90) und (91) in $\alpha = o$, $\beta = \frac{m}{2}$ übergehen; man nehme daher $AB = \frac{m}{2}$, Fig. 32, um den Punkt B der Evolute zu erhalten. Man sieht aus der

Gleichung (91), dass, wenn man dem x positive oder negative Werthe beilegt, β verhältnissmässig mit diesen Werthen wachse, woraus sich ergiebt, dass die Evolute aus zwei Schenkeln BC, und BD besteht.

166) Um vermittelst der Gleichungen (90) und (91) x zu eliminiren, erhebe man die erstere zum Quadrate, und man erhält:

$$x^6 = \alpha^2 \frac{m^4}{16};$$

und aus (91)

$$x^2 = \left(\beta - \frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{3}};$$

erhebt man diese Gleichung zum Cubus,

$$x^6 = \left(\beta - \frac{m}{2}\right)^3 \cdot \frac{m^3}{27};$$

werden die beiden Werthe von x^6 einander gleich gesetzt, und durch m^3 dividirt, so entsteht:

$$\alpha^2 \frac{m}{16} = \left(\beta - \frac{m}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{27};$$

wird $\beta - \frac{m}{2}$ durch β' bezeichnet, und durch 27 vervielfacht, so ist:

$$\beta'^3 = \frac{27}{16} m\alpha^2 = n\alpha^2 \text{ *)}$$

indem man $\frac{27}{16} m = n$ setzt, der Anfangspunkt ist alsdann nach B verlegt, weil $\beta' = \beta - \frac{m}{2}$.

*) Es ist leicht zu erweisen, dass die Schenkel BC und BD ihre erhabene Seite der Abscissen-Axe zukehren; denn differenziirt man die Gleichung $\beta'^3 = n\alpha^2$, oder $\beta' = n^{1/3} \alpha^{2/3}$, so findet man $\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2} = -\frac{2}{9} n^{1/3} \alpha^{-3/4} = -\frac{2}{9} \sqrt[3]{\frac{n}{\alpha^4}}$, einen negativen Werth sowohl für ein negatives als positives α, diess beweiset, dass jeder Schenkel seine hohle Seite der Abscissen-Axe zukehre.

167) Eine berührende Curve kann eine doppelte Lage haben hinsichtlich der Curve, welche von ihr berührt wird, nämlich:

1°. Entweder liegen ihre beiden Schenkel oberhalb der Curve, wie Fig. 33, oder beide unterhalb, wie Fig. 34, in beiden Fällen wird die krumme Linie von der Berührungs-Curve berührt.

2°. Ein Schenkel der Berührenden kann oberhalb, der andere unterhalb der Curve fallen, wie Fig. 35, da dann die Curve von der Berührenden im Punkte M geschnitten wird.

168) Es soll nun bewiesen werden, dass, Fig. 36, der Krümmungskreis die Curve schneide.

Es sei für dieselbe Abscisse $x + h$

Y die Ordinate der Curve,

Y' die Ordinate der Berührungs-Curve,

vermöge dessen hat man nun:

$$\left.\begin{array}{l} Y = \varphi\,(x + h) = \varphi x + Ah + Bh^2 + \ldots \\ Y' = F\,(x + h) = Fx + A'h + B\,h^2 + C'h^3 + \ldots \end{array}\right\} (92).$$

Weil der Zirkel ein Krümmungskreis der zweiten Ordnung ist, so sind die drei ersten Glieder dieser Entwicklungen wechselseitig gleich, der Unterschied also, der zu $x + h$ gehörigen Ordinaten, ist:

$$(C - C')\,h^3 + \ldots\ldots (93).$$

Man nehme nun an, die Abscisse werde $x - h$; man muss also $+ h$ in $- h$ in der Differenz der Ordinaten verwandeln; hierdurch erhält man;

$$-(C - C')\,h^3 + \ldots\ldots (94).$$

Da aber das erste Glied der Reihen (93) und (94) die Summe aller übrigen übersteigen kann, so nehme man h so klein als möglich; woraus folgt, dass das Zeichen des Unterschiedes der Ordinaten verändert wird, wenn die Abscisse $x - h$ statt $x + h$ sein wird. Nimmt man also, Fig. 36. $PP'' = PP' = h$, so wird, wenn der Unterschied der zu $x + h$ gehörigen Ordinaten eine positive Grösse ist, d. i. wenn die Ordinate $P'M'$ die Curve $P'N'$ übersteigt, so übersteigt auch die Ordinate

P''N'' der Berührungs-Curve die Ordinate der Curve. Hieraus kann man schliessen, dass die berührende Curve theils oberhalb theils unterhalb der Curve liege, folglich diese schneide.

Was wir vom Kreise gesagt haben, der eine berührende Curve der zweiten Ordnung ist, lässt sich auch auf alle berührenden Curven der Ordnungen anwenden, welche durch gerade Zahlen benannt sind.

169) Wäre die Berührungs-Curve von einer ungeraden Ordnung, so würde sie allein die Curve berühren, ohne sie zu schneiden, was nach dem vorhergehenden Beweise offenbar ist.

170) Wir wollen nun hier den versprochenen Beweis des Lehrsatzes, Art. 138, über die vielfachen Punkte geben. Wenn die Curven, die sich in einem Punkte vereinigen, eine gemeinschaftliche Tangente haben, derer Gleichung durch $ax + b$ gegeben ist; so verwandle man Fx in $ax + b$ in der zweiten der Gleichungen (92), wodurch man erhält: $\frac{dFx}{dx}$ oder $A' = a$, alle übrigen Coëfficienten dieser Gleichung werden Null sein. Da die Tangente eine Berührende der ersten Ordnung ist, so wird

$\varphi x + Ah = Fx + A'h$; hiedurch wird der Unterschied der Gleichungen (92) auf $Y - Y' = Bh^2 + Ch^3 + \ldots$ reducirt.

Da diese Differenz der Ordinaten einen doppelten Werth QM und QM', Fig. 30, haben soll; so muss einer der Differenzial-Coëfficienten B, C, ... zwei Werthe haben. Es sei $\frac{d^n y}{dx^n}$ dieser Coëfficient; nimmt man die verschiedenen Ordnungen der Diffezenziale in der Gleichung $Pdx + Qdy = o$, so weiss man aus Art. 143, dass bei jeder Differenziation das Glied Q immer ein Faktor des Differenzials der höchsten Ordnung von y bleibt, so dass das nte Differenzial der ge-

gebenen Funktion durch $Q \frac{d^n y}{dx^n} + R = o$ bezeichnet werden kann. Da $\frac{d^n y}{dx^n}$ zwei Werthe haben soll, so zeigt man, wie in Art. 137, dass Q Null ist, wodurch der Werth für P in Null übergeht. Hieraus folgt, dass die Gleichung $\frac{dy}{dx} = - \frac{P}{Q}$ giebt $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$.

Anwendung des Taylorschen Lehrsatzes auf die Entwicklung der Funktionen zweier Veränderlichen, welche einen Zuwachs erhalten.

171) Wenn man in einer Funktion u zweier unabhängigen Veränderlichen x und y, x in $x + h$, und y in $y + k$ verwandelt, so können diese Funktionen vermittelst des Taylorschen Lehrsatzes in eine Reihe entwickelt werden. Giebt man erst dem x den Werth $x + h$, so hat man:

$$f(x + h, y) = u + \frac{du}{dx} h + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \ldots \quad (95).$$

Da in dieser Formel h ausdrücklich vorkömmt, so muss y in den Funktionen u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, ... enthalten sein. Wird nun y in $y + k$ in diesen Funktionen verwandelt, so wird man in (95) für u setzen:

$$u + \frac{du}{dy} k + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3} \cdot \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots$$

für $\frac{du}{dx}$

$$\frac{du}{dx} + \frac{D. \frac{du}{dx}}{dy} k + \frac{D^2. \frac{du}{dx}}{dy^2} \frac{k^2}{2} + \ldots$$

für $\frac{d^2u}{dx^2}$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{D.\frac{d^2u}{dx^2}}{dy} k + \frac{D^2.\frac{d^2u}{dx^2}}{dy^2} \frac{k^2}{2} + \ldots$$

Bildet man eben so viele Linien, als Glieder in der Gleichung (95) vorhanden sind, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} f(x+h, y+k) = u + \frac{du}{dx} k + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{k^2}{2} + \ldots \\ + \frac{du}{dx} h + \frac{D.\frac{du}{dx}}{dy} hk + \ldots \\ + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \ldots \\ + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (96).$$

172) Hätte man diese Substitutionen in umgekehrter Ordnung vorgenommen, so hätte man gefunden, wenn erst y in y + k verwandelt,

$$f(x, y+k) = u + \frac{du}{dy} k + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{k^2}{2} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{k^3}{2.3} + \ldots$$

und dann in jedem Gliede x + h an die Stelle von x gesetzt worden wäre,

$$\left.\begin{aligned} f(y+k, x+h) = u + \frac{du}{dx} h + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \ldots \\ + \frac{du}{dy} k + \frac{D.\frac{du}{dy}}{dx} hk + \ldots \\ + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{k^2}{2} + \ldots \\ + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (97).$$

Die Ordnung, in welcher diese Substitutionen vorgenommen werden, ist ganz willkührlich, weil man überall, wo x steht, x + h, und wo y steht, y + k einführen muss. Desswegen können auch die Operationen aufeinander keinen Einfluss haben; hieraus folgt, dass diese beiden Reihen (96) und (97) identisch sein, und also die Glieder, mit denselben Produkten von h

und k behaftet, dieselben Werthe haben müssen. Setzt man also die Glieder, welche durch hk vervielfacht sind, einander gleich, so erhält man:

$$\frac{D.\frac{du}{dx}}{dy} = \frac{D.\frac{du}{dy}}{dx} \text{ oder vielmehr } \frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}.$$

Diese Gleichung lehrt, dass die Ordnung der Differenziationen zur Erhaltung des zweiten Differenzials des Produkts zweier Veränderlichen willkührlich ist. Dasselbe könnte man für die höheren Differenziale beweisen, indem man die Differenzial-Coëfficienten der andern gleichartigen Glieder der Reihen (96) und (97) einander gleich setzte.

Vom Grössten und Kleinsten bei Funktionen zweier Veränderlichen.

173) Wir haben oben, Art. 171, gesehen, dass wenn man x + h für x, und y + k für y in einer Funktion zweier unabhängigen Veränderlichen x und y setzt, die Entwicklung von f (x + h, y + k) durch die Gleichung (96) gegeben werde. Wird nun in diese Gleichung f (x + h, y + k) durch U;

k durch mh, und $\frac{D.\frac{du}{dx}}{dy}$ durch $\frac{d^2u}{dxdy}$ dargestellt, so hat man:

$$U = u + h\left(\frac{du}{dy}m + \frac{du}{dx}\right) + \tfrac{1}{2}h^2\left(\frac{d^2u}{dy^2}m^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}m + \frac{d^2u}{dx^2}\right)$$
$$+ \text{Glieder} \times h^3 + \text{Glieder } h^4 + \ldots \quad (98).$$

Damit u ein Grösstes oder Kleinstes werde, muss U, was man auch dem Wachsthum h und k für einen Werth beilegt, immer grösser oder kleiner als u sein, welches jedoch nur dann Statt haben kann, wenn das Glied $h\left(\frac{du}{dy}m + \frac{du}{dx}\right)$ Null ist. Denn wäre diess nicht der Fall, so könnte dieses Glied, Art. 89, grösser gemacht werden, als die algebraische Summe aller darauf folgenden Glieder, indem man dem h einen schicklichen Werth beilegte. Nähme man einmal diesen Werth ne-

gativ das anderemal positiv; so wäre im ersten Falle U grösser, im zweiten kleiner als u. Damit also diese Funktion ein *Grösstes* oder *Kleinstes* sei, so muss man nothwendig haben.

$$h\left(\frac{du}{dy}m+\frac{du}{dx}\right)=o,$$

oder vielmehr:

$$\frac{du}{dy}m+\frac{du}{dx}=o.$$

Da die Grösse k willkührlich ist, so muss diess auch von m gelten; diese Gleichung findet folglich Statt, was auch immer m sei. Desswegen kann sie in folgende zerlegt werden:

$$\frac{du}{dy}=o,\ \frac{du}{dx}=o.$$

174) Wir wollen nun untersuchen, wodurch das *Grösste* vom *Kleinsten* sich unterscheidet. Da das Glied mit h behaftet Null ist, so beruht das Zeichen der algebraischen Summe aller auf u folgenden Glieder auf dem mit h^2 behafteten Gliede, dieses Glied darf also, wenn es nicht gleich Null ist, nicht bald positiv bald negativ für gewisse Werthe von h und k werden, sonst könnte U einmal grösser, das anderemal kleiner als u sein. Man muss daher die Bedingung aufsuchen, unter welcher das Glied mit h^2 behaftet für jeden Werth von h und k dasselbe Zeichen beibehalte. Man stelle das mit h^2 behaftete Glied der Gleichung (98) so vor:

$$\frac{1}{2}h^2(Am^2+2Bm+C);$$

wird A getrennt, und als gemeinschaftlicher Faktor betrachtet, so hat man:

$$\frac{1}{2}Ah^2\left(m^2+2\frac{B}{A}m+\frac{C}{A}\right)\ .\ .\ .\ .\ .\ (99).$$

Wird zu den Grössen zwischen den Klammern $\frac{B^2}{A^2}$ addirt und davon subtrahirt, so wird in der Summe nichts geändert, und man kann (99) so schreiben:

$$\frac{1}{2}Ah^2\left[\left(m+\frac{B}{A}\right)^2+\frac{C}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right] \ldots (100).$$

Man sieht hieraus, dass das Zeichen von der Grösse A abhängt; wenn C und A^2 dasselbe Zeichen haben, hat man $\frac{C}{A} > \frac{B^2}{A^2}$, d. i. $AC > B^2$, denn in diesem Falle ist die Grösse, welche durch $\frac{1}{2}Ah^2$ vervielfacht erscheint, wesentlich positiv, und das Zeichen des Ausdrucks (100) hängt allein von A ab, dass man also ein Maximum oder Minimum hat, je nachdem A negativ oder positiv, d. i. je nachdem das Zeichen von $\frac{d^2u}{dy^2}$ ist, welches sich aber nach jenem von $\frac{d^2u}{dx^2}$ richtet, weil C und A mit denselben Zeichen behaftet angenommen werden.

Von der Umformung der rechtwinklichten Coordinaten in Polar-Coordinaten.

175) In der Curve BDC, Fig. 79, sei die Lage eines Punktes M vermittelst rechtwinklichter Coordinaten AP = x und PM = y bestimmt.

Dieser Punkt kann auch durch den gegebenen Winkel AMC und den Fahrstrahl AM bestimmt werden. Da man aber gewöhnlich die Grösse der Winkel durch Kreisbögen misst, so wollen wir den Winkel MAC durch den Kreisbogen, der mit dem Strahle = 1 beschrieben ist, ersetzen. Wird dieser Kreisbogen mo durch t, und der Fahrstrahl AM durch u bezeichnet, so kann man das System der Polar-Coordinaten t und u für das der rechtwinklichten Coordinaten AP = x, und PM = y einführen.

176) Es ist zu bemerken, dass der Anfangspunkt der Abscissen manchmal anderswo als in o gesetzt wird; denn der Punkt M ist ebenfalls bestimmt, wenn man für einen neuen Anfangspunkt o′ den Kreisbogen o′m und den Fahrstrahl AM kennt; da dann o′m durch t′

bezeichnet werden kann. In diesem Falle unterscheiden sich alle Abscissen vom Anfangspunkte o an von den Abscissen des Anfangspunktes o' um eine beständige Grösse Oo', und es findet zwischen ihnen folgende Beziehung Statt:

$$t = t' - o'o.$$

Da man mit Hilfe dieser Relation immer den Anfangspunkt nach Gefallen verändern kann, so nehme man der Einfachheit willen o für den Anfangspunkt.

177) Es bezeichne nun F (x, y) = o die Gleichung, in welcher man die rechtwinklichten Coordinaten AP = x, MP = y in die Polar-Coordinaten om = t, AM = u verwandeln will, und man suche die Verbindungen auf, welche zwischen diesen Coordinaten eintreten. Man hat offenbar

$$AP = AM \text{ Cos. } MAP; \; PM = AM \text{ Sin. } MAP,$$

oder

$$x = u \text{ Cos. } t; \; y = u \text{ Sin. } t \; . \; . \; . \; (101).$$

Es wäre also schon hinreichend, diese Werthe in die Gleichung F (x, y) = o zu substituiren, um diejenige zu erhalten, welche sich auf die Polar-Coordinaten bezöge.

178) Ist der Anfangspunkt der rechtwinklichten Coordinaten nicht das Centrum A der Curve, Fig. 80; so seien x', y' die Coordinaten vom Anfangspunkte A', und a, b die Coordinaten vom Mittelpunkte A gerechnet; und man wird haben:

$$AP = A'Q - A'B; \; MP = MQ - AB$$

oder

$$x = x' - a, \; y = y' - b,$$

welche Werthe man in die vorigen Formeln einführen muss.

Von der Umformung der Polar-Coordinaten in rechtwinklichte Coordinaten, und Bestimmung des Differenzial-Ausdrucks des Bogens in einer Polar-Curve.

179) Wird die Gleichung für die Polar-Coordinaten durch F (t, u) = o bezeichnet, so sieht man aus (Fig. 79), dass für u sein Werth gesetzt werden kann aus der Gleichung

$$AM^2 = AP^2 + PM^2$$

oder

$$u^2 = x^2 + y^2 \ldots\ldots (102).$$

Hinsichtlich t erhält man aus den Gleichungen (101), wenn eine durch die andere dividirt wird,

$$\frac{y}{x} = \frac{\text{Sin. } t}{\text{Cos. } t} = \text{Tang. } t,$$

hieraus wiederum:

$$t = \text{Bogen}\left(\text{Tang.} = \frac{y}{x}\right).$$

Wird dieser Werth für t und der von u in die Gleichung, durch F (t, u) = o vorgestellt, eingeführt, so ergiebt sich:

$$F\left[\text{Bogen}\left(\text{Tang.} = \frac{y}{x}\right); \sqrt{x^2 + y^2}\right] = o \ldots (103).$$

Auf diese Art gelangt man zu einer Gleichung zwischen x und y, welche zugleich eine transcendente Grösse enthält.

180) Auch kann man zwischen x und y eine Gleichung erhalten, worin die transcendente Grösse, Bogen $\left(\text{Tang.} = \frac{y}{x}\right)$ nicht vorkömmt, in welcher sich hingegen Differenziale finden.

In diesem Falle differenziirt man entweder die Gleichung, durch die Formel (103) vorgestellt, oder, was gewöhnlicher ist, man bedient sich folgenden Mittels, um zum Ziele zu gelangen. Es sei immer durch F (u, t) = o die Gleichung bezeichnet, welche in eine Funk-

tion rechtwinklichter Coordinaten x und y umgeändert werden soll. In Art. 179. hat man gesehen, dass der Werth von u sich durch x und y ausdrücken lässt, ohne transcendente Grösse, welches aber für t nicht der Fall ist. Desshalb wollen wir nun t vermittelst F (t, u) = o, und dem Differenzial dieser Gleichung, welches durch F (t, udt, du) = o bezeichnet werden soll, eliminiren, und in das Resultat der Elimination die Differenziale dt und du einführen; da aber diese Differenziale sich als Funktion von x, y und dx ausdrücken lassen, so liefern die Gleichungen (101),

$$\text{Cos. } t = \frac{x}{u}; \text{ Sin. } t = \frac{y}{u} \ldots\ldots (104).$$

Wird die eine durch die andere Gleichung dividirt, so ist:

$$\frac{\text{Sin. } t}{\text{Cos. } t} = \text{Tang. } t = \frac{y}{x}.$$

Durch Differenziation ergiebt sich:

$$\frac{dt}{\text{Cos.}^2 t} = \frac{xdy - ydx}{x^2}.$$

Schreibt man für $\frac{1}{\text{Cos.}^2 t}$ seinen Werth aus der ersten Gleichung (104) und vernachlässigt den gemeinschaftlichen Divisor x^2, so findet man:

$$u^2 dt = xdy - ydx,$$

und daher

$$dt = \frac{xdy - ydx}{u^2} \ldots\ldots (105);$$

und für u seinen Werth gesetzt, wird diese Gleichung:

$$dt = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Das Differenzial der andern Veränderlichen ergiebt sich noch leichter; denn die Gleichung (102) liefert

$$u = \sqrt{x^2 + y^2},$$

und durch Differenziation

$$du = \frac{xdx + ydx}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Mit Hilfe der Werthe von dt, du, und u kann man die durch Elimination des t erhaltene Gleichung in eine andere verwandeln, welche nur x, y, dx und dy enthält, die sich mithin auf rechtwinklichte Coordinaten bezieht.

181) Nach Art. 159 ist der Ausdruck des Differenzials eines Bogens z auf rechtwinklichte Coordinaten bezogen,

$$dz = \sqrt{dx^2 + dy^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; (106).$$

Man kann sich nun auch die Aufgabe vorlegen, das Differenzial desselben Bogens für Polar-Coordinaten zu bestimmen. In diesem Falle wird man in die Gleichung (106) die Werthe von dx, und dy aus den Gleichungen

$$x = u \text{ Cos. } t; \text{ und } y = u \text{ Sin. } t$$

einführen, und durch Differenziation zu folgenden Gleichungen gelangen:

$$dx = - u \text{ Sin. } t. \; dt + \text{Cos. } t. \; du,$$

$$dy = u \text{ Cos. } t. \; dt + \text{Sin. } t. \; du.$$

Werden diese Gleichungen zum Quadrat erhoben, und mit Hilfe der Formel $\text{Sin.}^2 t + \text{Cos.}^2 t = 1$ reducirt, so erhält man:

$$dz = \sqrt{u^2 dt^2 + du^2},$$

und diess ist das Differenzial des Bogens als Funktion der Polar-Coordinaten.

Von den Subtangenten, Subnormalen, Normalen und Tangenten der Polar-Curven.

182) Man weiss, dass in den Curven mit rechtwinklichten Coordinaten, die Subtangente At, Fig. 81, immer zwischen dem Fusspunkte P der Ordinate, und dem Punkte t, wo eine Senkrechte At auf diese Ordinate der Tangente begegnet, begriffen ist. Behält man die nämliche Definition für die Polar-Curve bei, wo man nicht mehr die Ordinate PM, sondern den Fahrstrahl AM hat; so wird die Subtangente die Senkrechte AT sein, welche zwischen dem Punkte A, und dem Durchschnittspunkte T der Tangente MT enthalten ist. Hier-

aus ist klar, dass die Subtangente in den Polar-Curven eine andere Lage hat, als in ändern von diesen verschiedenen Curven. Denn in diesen ist die Subtangente immer ein Theil der Abscissen-Axe, während in den Polar-Curven, wo diese Axe nicht existirt, ihre Lage für jeden Curvenpunkt sich ändert.

183) Wir wollen nun den analytischen Ausdruck der Subtangente in den Polar-Curven bestimmen. Man erwähle daher zwei Fahrstrahlen AM, und AM′, Fig. 82, lasse aus dem Punkte M die Senkrechte MP auf den Fahrstrahl AM′ herab, und ziehe AC zu dieser Senkrechten parallel. Die ähnlichen Dreiecke ATM′ und PMM′ führen zu folgender Proportion:

$$PM' : PM = AM' : AT,$$

daraus

$$AT = \frac{AM' \times PM}{PM'}.$$

Bemerkt man, dass PM′ eine Seite des rechtwinklichten Dreiecks PMM′ ist, so wird:

$$AT = \frac{AM' \times PM}{\sqrt{(\overline{AM'}^2 - \overline{PM}^2)}};$$

nimmt man das Gränzverhältniss, so ist AM′ gleich AM, d. i. gleich u, PM fällt mit dem Bogen MN, die Sehne MM′ mit dem Bogen MM′ zusammen, und AT wird Subtangente. Man bedarf also zur Bestimmung des Gränzverhältnisses nur der Ausdrücke M′M und MN; der erstere von ihnen ist alsdann nichts anders, als das Differenzial des Curvenbogens, mithin, Art. 181,

$$MM' = \sqrt{u^2dt^2 + du^2}.$$

Für MN geben die Ausschnitte ARR′ und AMN folgende Proportion;

$$AR : RR' = AM : MN,$$

oder

$$1 : RR' = u : MN,$$

daher

$$MN = u \,.\, RR',$$

welche Grösse im Falle der Endgränze auf udt reducirt

wird. Werden diese Werthe von MN, M′M in den für AT gesetzt, so findet man, nachdem darin AM in u, PM in MN verwandelt, und reducirt worden ist.

$$AT = \frac{u^2 dt}{du};$$

diess ist der Ausdruck der Subtangente.

184) Zur Bestimmung der Subnormale dient die Bemerkung, dass nämlich, da die Normale SM zur Tangente senkrecht ist, die Ordinate, Fig. 81, die mittlere Proportionallinie zwischen der Subtangente, und der Subnormale sein müsse; man hat folglich:

$$AT : AM = AM : \textit{Subnormale},$$

oder

$$\frac{u^2 dt}{du} : u = u + \textit{Subnormale},$$

daher

$$\text{Subnormale} = \frac{du}{dt};$$

für die Normale und Tangente geben die ähnlichen Dreiecke MAS, MAT:

$$MS = \sqrt{\overline{MA}^2 + \overline{AS}^2}; \; MT = \sqrt{\overline{MA}^2 + \overline{AT}^2}.$$

Substituirt man in diese Gleichungen die Werthe für MA, AS und AT, so erhält man:

$$\textit{Normale} = \sqrt{u^2 + \frac{du^2}{dt^2}}; \; \textit{Tangente} = u\sqrt{1 + u^2 \frac{dt^2}{du^2}}.$$

185) Um den analytischen Ausdruck des Sectors in den Polar-Curven zu finden, giebt das Dreieck AM′M, Fig. 82,

$$\textit{Inhalt} \triangle AM'M = \frac{AM' \times PM}{2}.$$

Im Falle der Endgränze geht der Inhalt des Dreiecks AM′M, Fig. 82, in den eines Elementarsectors über, die Senkrechte PM lässt sich durch den Bogen AM, welchen wir gleich udt gefunden haben, ersetzen, und AM′ geht in u über. Werden diese Werthe in die vorstehende Gleichung eingeführt, so findet man:

$$\textit{Inhalt des Elementarsectors} = \frac{u^2 dt}{2}.$$

Man kann auch den Inhalt des Elementarsectors als Funktion von rechtwinklichten Coordinaten ausdrücken. Denn setzt man in diese Gleichung die Werthe von u und dt aus den Gleichungen (102) und (103), so geht sie in folgende über:

$$\textit{Inhalt des Elementarsectors} = \frac{x dy - y dx}{2}.$$

Von der Bestimmung des Krümmungshalbmessers in einer Polar-Curve.

186) Wir haben in Art. 149 den Ausdruck des Krümmungshalbmessers auf rechtwinklichte Axen bezogen, erhalten; da wir uns vorbehielten, diesem Ausdrucke dasjenige Zeichen zu geben, wodurch γ positiv wird, wollen wir ihn nun auf folgende Art schreiben:

$$\gamma = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (107).$$

Um diesen Werth von γ als Funktion der Polar-Coordinaten auszudrücken, darf man nur mit Hilfe folgender Gleichungen die Differenzial-Coëfficienten aus diesem Ausdrucke eliminiren:

$$x = u \text{ Cos. } t; \; y = u \text{ Sin. } t;$$

differenziirt man, und dividirt nachher die Resultate durcheinander, so geht daraus hervor:

$$\frac{dy}{du} = \frac{du \text{ Sin. } t + u \text{ Cos. } t.\, dt}{du \text{ Cos. } t - u \text{ Sin. } t.\, dt};$$

werden Zähler und Nenner dieses Bruchs durch m und n bezeichnet, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} m &= du \text{ Sin. } t + u \text{ Cos. } t.\, dt \\ n &= du \text{ Cos. } t - u \text{ Sin. } t.\, dt \end{aligned}\right\} \ldots (108)$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (109)$$

oder

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Vermittelst dieser Gleichungen findet man für den Zähler des Ausdrucks von γ:

$$\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2} = \left(\frac{n^2 + m^2}{n^2}\right)^{3/2};$$

erhebt man wirklich auf der Rechten des Gleichheitszeichens zur Potenz $3/2$, und bemerkt, dass die Potenz $3/2$ von n^2 gleich sei n^3, so hat man:

$$\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2} = \frac{(n^2 + m^2)^{3/2}}{n^3} \dots\dots (110).$$

Differenziirt man hierauf die Gleichung (109), so findet man:

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{ndm - mdn}{n^2};$$

dividirt man den ersten Theil dieser Gleichung durch dx, den zweiten durch n, welches gleich dx ist,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ndm - mdn}{n^3} \dots\dots (111).$$

Durch (110) und (111) wird die Gleichung (107) in folgende verwandelt:

$$\gamma = \frac{(n^2 + m^2)^{3/2}}{ndm - mdn} \dots\dots (112).$$

Nun darf man diese letztere Gleichung nur in eine Funktion von t und u umformen, welches dadurch bewirkt wird, indem man den Werth von $n^2 + m^2$ durch Addition der Quadrate der Gleichungen (108), und durch Reduction vermittelst $\text{Sin.}^2 t + \text{Cos.}^2 t = 1$, bestimmt; man erhält:

$$n^2 + m^2 = du^2 + u^2dt^2 \dots\dots (113).$$

Zur Bestimmung des Nenners der Gleichung (112) differenziire man nach und nach die Gleichungen (108), indem dt als beständig betrachtet wird, und multiplicire das eine der betreffenden Resultate durch n, das andere durch m, so ergiebt sich:

$$ndm = nd^2u \, Sin. \, t + 2ndu \, Cos. \, t.dt - nu \, Sin. \, t.dt^2;$$
$$mdn = md^2u \, Cos. \, t - 2mdu \, Sin. \, t.dt - mu \, Cos. \, t.dt^2;$$

die letztere von der ersten abgezogen, bleibt:

$$\left. \begin{array}{l} ndm - mdn = d^2m \, (n \, Sin. \, t - m \, Cos. \, t) \\ \quad + 2dudt \, (n \, Cos. \, t - m \, Sin. \, t) \\ \quad - udt^2 \, (n \, Sin. \, t - m \, Cos. \, t) \end{array} \right\} \ldots (114).$$

Multiplicirt man die zweite der Gleichungen (107) durch Sin. t, die erste durch Cos. t, zieht sie voneinander ab, und reducirt vermittelst . . . $Sin.^2 t + m \, Cos.^2 t = 1$, so erhält man:

$$n \, Sin. \, t - m \, Cos. \, t = - udt.$$

Verrichtet man ähnliche Geschäfte, um n Cos. t + m Sin. t zu bilden, so ist:

$$n \, Cos. \, t + m \, Sin. \, t = du.$$

Werden diese Werthe in (114) eingeführt, so geht jene Gleichung in folgende über:

$$ndm - mdn = - ud^2udt + 2du^2dt + u^2dt^3 \ldots (115).$$

Mit Hilfe dieser Werthe, die wir so eben aufgefunden haben, ändern die Gleichungen (113) und (115) jene (112) in folgende um:

$$\gamma = \frac{(du^2 + u^2dt)^{3/2}}{2du^2dt - ud^2udt + u^2dt^3}.$$

Von den transcendenten Curven.

187) Man nennt jene Curven also, welche transcendente Grössen, oder Differenzial-Coëfficienten enthalten, und überhaupt jene Curven, deren Gleichungen nicht durch eine begränzte Anzahl algebraischer Glieder können gegeben werden. Wir wollen hier mit den merkwürdigsten unsere Leser bekannt machen.

Von der Spirale des Archimedes oder des Conon.

188) Diese Curve wird auf folgende Art erzeugt. In derselben Zeit, als der Halbmesser AB, Fig. 37, eine Umdrehung macht, gelangt ein Punkt A vom Mittelpunkt A′ mit gleichförmiger Bewegung zum andern Endpunkte B des Halbmessers AB, so dass der bewegliche Punkt, der im Anfange der Umdrehung in A sich befand, nun in B ist, sobald der Halbmesser AB um das Centrum

seine Bewegung wird vollendet haben. Der Punkt A beschreibt bei dieser Bewegung die *Spirale* des *Archimedes*.

Es sei AB = a, Bog. BN = t, AM = u, mithin Kraft der vorhergehenden Definition:

$$AM : AN = \text{Bog. } NB : BCDB,$$

oder

$$u : a = t : 2\pi a,$$

hieraus

$$u = \frac{t}{2\pi};$$

es ist klar, dass die Curve keine rechtwinklichte Coordinaten hat. Da AB eine ganze Umwälzung vollendet, so ist der Bogen NB dem Umkreise gleich; daher $t = 2\pi a$; hierdurch wird die vorige Gleichung in folgende verwandelt:

$$u = \frac{2\pi a}{2\pi} = a.$$

Wenn der Punkt A seine Bewegung immer gleichförmig fortsetzt, so beschreibt der Halbmesser AB eine zweite Umdrehung um das Centrum A, und nimmt man $BB' = BA$, so kömmt am Ende dieser zweiten Umdrehung der bewegliche Punkt nach B′, und dann ist $t = 4\pi a$, mithin $u = 2a$; u. s. w.

Von der logarithmischen Spirale.

189.) Die logarithmische Spirale ist eine Polar-Curve, in welcher der Winkel AMT, Fig. 81, durch den Fahrstrahl AM, und die Tangente MT der Curve gebildet, eine beständige Grösse ist. *) Wird daher die trigono-

*) Um diese Curve hat sich hauptsächlich verdient gemacht *Jakob Bernouilli*. Er würde, wenn es noch Sitte wäre, eine logarithmische Spirallinie auf sein Grabmal eingegraben verlangt haben, wie einst der grosse *Archimedes* eine in einen Cylinder eingeschriebene Kugel.

Zum bessern Mahlen des Getraides verlangt man, dass sich die in die Mühlsteine gehauenen Strahlen, oder Hau-Schläge, durchgängig unter einem Winkel von 60° schneiden sollen. Diess kann dadurch bewirkt werden, wenn die logarithmische Spirale auf ein Brett gezeichnet, und darnach eine Lehre (Chablone) verfertigt wird, nach welcher die Hauschläge bearbeitet werden können. (Der Uebers.)

metrische Tangente dieses Winkels durch a bezeichnet, so ist:

$$\text{Tang. } AM'T = a;$$

das rechtwinklichte Dreieck AMT giebt:

$$1 : \text{Tang. } AMT = AM : AT,$$

mithin

$$\text{Tang. } AMT = \frac{AT}{AM}.$$

Wird u für den Fahrstrahl AM, und $\frac{u^2 dt}{du}$ für AT aus Art. 183 für die Subtangente einer Polar-Curve geschrieben, so hat man:

$$\text{Tang. } AMT = a = \frac{udt}{du},$$

folglich

$$\frac{adu}{u} = dt \;\ldots\ldots\ldots\ldots (116);$$

und durch Integration:

$$a \text{ Log. } u + t = \textit{Constante}.$$

Es sei e die Grundzahl des Systems der neperschen Logarithmen; wird a als Logarithme von e in irgend einem andern logarithmischen Systeme betrachtet, so kann man Le für a setzen; alsdann wird durch Le Log. u der Logarithme dieses Systems vorgestellt *), so dass

$$Lu = t + \text{Const.}$$

190) Man kann die logarithmische Spirale durch Punkte auf folgende Art construiren. Nachdem man den Umkreis OO′O″, Fig. 83, in gleiche Theile getheilt hat, ziehe man Halbmesser in die Theilungspunkte, und nehme auf diesen Halbmessern die Theile Am, Am′, Am″, . . . so dass sie in einer geometrischen Progression fortschreiten; die Punkte m, m′, m″, m‴, ...

*) Um diess zu beweisen, sei a die Grundzahl des natürlichen Logarithmen-Systems; man hat $u = e^{\text{Log. } u}$; nimmt man die Logarithmen der Tafeln durch L bezeichnet, so ist: $Lu = L\,(e^{\text{Log. } u}) = \text{Log. } u\ Le.$

gehören einer logarithmischen Spirale an. Nimmt man wirklich die Theile mm′ m′m″ m″m‴ . . . in einer sehr kleinen Entfernung voneinander, so kann man sie als gerade Linien betrachten, da es dann ganz leicht zu erweisen ist, dass die Dreiecke Amm′, Am′m″, Am″m‴, ähnlich sind; denn die Winkel bei A sind vermöge der Construction, und die Winkel mm′A, m′m″A, m″m‴A, . . . vermöge der besondern Eigenschaft der Curve gleich. Man hat daher folgende Reihen von Proportionen:

$$Am : Am' = Am' : Am'',$$
$$Am' : Am'' = Am'' : Am''',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

woraus erhellet, dass die Ordinaten Am, Am′, Am″, Am‴, . . . in geometrischer Progression fortschreiten.

191) Die Normale der logarithmischen Spirale gleicht dem Krümmnngshalbmesser; denn der Ausdruck für diesen Halbmesser in einer Polar-Curve, nach Art. 186, ist:

$$\gamma = \frac{(du^2 + u^2dt^2)^{3/2}}{2du^2dt - ud^2udt + u^2dt^2},$$

in welche Formel man die Werthe von du, und d^2u aus der Gleichung der logarithmischen Spirale einführen muss; allein nach der Gleichung (116) ist:

$$du = \frac{udt}{a}; \; d^2u = \frac{du}{a} . dt = \frac{udt^3}{a^2}.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung für γ eingeführt, so erhält man:

$$\gamma = \frac{\left(\frac{u^2}{a^2} + u^2\right)^{3/2}}{\frac{u^2}{a^2} + u^2} = \left(\frac{u^2}{a^2} + u^2\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{u^2}{a^2} + u^2}.$$

Wenn ferner in den Ausdruck für die Normale, Art. 184,

$$\sqrt{u^2 + \frac{du^2}{dt^2}}$$

der Werth von $\frac{du^2}{dt^2}$ eingeführt wird, so findet man eben-

falls $\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + u^2}$, woraus ersichtlich ist, dass die Normale dieser Curve dem Krümmungshalbmesser gleich ist; da er überdiess in der nämlichen Richtung der Normale ist, Art. 155, folgt, dass diese Linien aufeinander fallen.

192) Diese Eigenschaft giebt uns nun Mittel an die Hand, zu beweisen, dass die Evolute der logarithmischen Spirallinie eine andere Evolute ist. Betrachtet man desshalb den Punkt N der Normale als einen Punkt des Krümmungshalbmessers, dessen Endpunkt er ist, so liegt der Punkt in der Evolute. Es seien t′, u′ die Coordinaten dieses Punktes N, Fig. 84, so wird man sie leicht als Funktion der Coordinaten t, u des Curvenpunktes M bestimmen. Denn ist oo′ ein Kreisbogen, dessen Halbmesser der Einheit gleicht, so werden die Abscissen der Punkte M und N um diesen Bogen voneinander verschieden sein, welcher wegen des rechten Winkels MAN einem Quadranten gleich ist. Gebraucht man für den Quadranten mit dem Halbmesser = 1 beschrieben die gewöhnliche Bezeichnung $\frac{\pi}{2}$, so hat man

$t', = t + \frac{\pi}{2}$, woraus man durch Differenziation erhält $dt = dt'$. Weil ferner die Polar-Ordinate u′ des Punktes N der Evolute gleich ist der Subnormale $\frac{du}{dt}$ der logarithmischen Spirallinie; so verwandle man $\frac{du}{dt}$ in u′ in der Gleichung für diese Curve, und man wird finden $u = au'$, folglich $du = adu'$. Werden die Werthe von dt, du und u in die Gleichung (116) der logarithmischen Spirallinie eingeführt, so ergiebt sich:

$$a \frac{du'}{u'} = dt'.$$

Da diese Gleichung die Form der vorhergehenden hat, so beweisst diess, dass die Evolute einer logarith-

mischen Spirale wiederum eine logarithmische Spirallinie ist.

Von der hyperbolischen Spirallinie, und überhaupt von den Spirallinien, welche in der Gleichung $u = at^n$ *begriffen sind.*

193) Die charakteristische Eigenschaft der hyperbolischen Spirallinie ist eine unveränderliche Subtangente. Wird diese Subtangente durch a bezeichnet, und dem Werthe der Subtangente, Art. 183, einer Polar-Curve gleichgesetzt, so ist die Gleichung der hyperbolischen Spirallinie:

$$u^2 \frac{dt}{du} = - a;$$

die Constante a ist aus dem Grunde negativ genommen, weil alsdann

$$- \frac{du}{u^2} = \frac{dt}{a}.$$

Wird diese Gleichung *integrirt*, so ist

$$\frac{1}{u} = \frac{t}{a} + C;$$

oder wenn man für die Constante C eine andere $\frac{C'}{a}$ einführt

$$\frac{1}{u} = \frac{t}{a} + \frac{C'}{a};$$

nimmt man nun den Anfangspunkt der t so, dass die Abscisse $t + C'$ einer neuen Abscisse t gleicht, so wird die vorige Gleichung

$$\frac{1}{u} = \frac{t}{a},$$

oder vielmehr

$$u = \frac{a}{t} \quad \ldots\ldots \quad (117)$$

woraus ersichtlich ist, dass wenn $t = 0$, $u = \infty$ werde, und hieraus folgt, dass der Fahrstrahl, welcher zu dem Punkte gehört, wo t Null ist, eine Asymptote der Curve sei.

194) Die Gleichung (117) beweisst ferner, dass der Fahrstrahl im umgekehrten Verhältnisse der Abscisse ist. Macht man nach und nach $t = 2\pi$, $t = 4\pi$, $t = 6\pi$, so erhält man folgende Reihe von Werthen für

$$u, \frac{a}{2\pi}, \frac{a}{4\pi}, \frac{a}{6\pi}, \ldots$$

woraus erhellet, dass am Ende der zweiten Umwälzung der Fahrstrahl auf die Hälfte dessen, was er am Ende der ersten Windung war, reducirt wird; am Ende der Dritten Umwälzung ist er auf ein Drittel reducirt; u. s. w.

195) Die Gleichungen für die hyperbolische Spirallinie, und für die des Conon sind nur besondere Fälle der Gleichung $u = at^n$; denn setzt man $n = 1$, und $a = \frac{1}{2\pi}$ so erhält man die erstere, und für $n = -1$, die zweitere. Unter den Spirallinien der Gleichung $u = at^n$ unterscheidet man noch die *parabolische*, welche man durch $n = 2$ erhält.

Von der logarithmischen Linie.

196) Die logarithmische Linie ist eine Curve mit rechtwinklichten Coordinaten, in welcher die Abscisse der Logarithmus der Ordinate ist. Die Gieichung dieser Curve ist also:

$$x = \text{Log. } y,$$

hieraus

$$y = a^x$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = a^x \text{ Log. } a.$$

197) Bei der Discussion dieser Gleichung mache man $x = o$, und man findet $y = 1$; giebt man also nach und nach dem x wachsende stets positive Werthe, so wird auch y unaufhörlich wachsen. Erhält aber x einen negativen Werth $-u$, so ist $y = a^{-u} = \frac{1}{a^u}$,

woraus erhellet, dass die Ordinate um so mehr abnimmt, je weiter sie von dem Anfangspunkte sich entfernt auf der Seite der negativen Abscissen, und dass die Curve die Axe der x nur in einer unendlichen Entfernung erreichen kann, wo dann die Gleichung $y = \frac{1}{a^u}$ übergeht in $y = \frac{1}{a^\infty} = o$; woraus sich schliessen lässt, dass die Verlängerung der Axe der x eine Asymptote der Curve ist.

198) Wenn man vom Anfangspunkte an gleiche Abscissen $AP = u$, $AP' = -u$, Fig. 38, nimmt, so ist $PM = a^u$; $P'M' = \frac{1}{a^u}$; also $PM \times P'M' = 1$.

199) Die merkwürdigste Eigenschaft dieser Curve ist der unveränderliche Werth der Subtangente. Denn wenn man die Gleichung der logarithmischen Linie differenzürt, so giebt sie $\frac{dy}{dx} = a^x \text{ Log. } a$, woraus $\frac{a^x dx}{dy} = \frac{1}{\text{Log. } a}$, oder . . . $\frac{ydx}{dy} = \frac{1}{\text{Log. } a}$; der erste Theil dieser Gleichung drückt den Werth der Subtangente der Curve aus, Art. 69, mithin eine beständige Grösse.

Von der Cycloide.

200) Die Cycloide ist eine Curve, welche durch die Bewegung eines Punktes M, Fig. 39, auf der Peripherie eines Kreises, der sich auf der geraden Linie RC fortwälzt, beschrieben wird. Es ist offenbar, dass bei dieser Bewegung von R nach C, alle Punkte des Kreisbogens RM nach und nach die gerade Linie RA decken, bis M auf A zu liegen kömmt, folglich ist der Kreisbogen RM der Geraden RA gleich.

Da unter dieser Voraussetzung alle Punkte, über welche der Punkt M hinrollt, bei dieser Bewegung auf

der Cycloide sich befinden, so muss sich der Punkt A auch auf der Curve befinden. Man nehme ihn als Anfangspunkt der Abscissen, und lasse ME senkrecht auf BR herab; wenn AP = x, PM = y, BR = 2a, Bog. MR = z, ME = u, so hat man:

$$AP = AR - PR,$$

oder

$$x = \text{Bog. } MR - ME,$$

oder

$$x = z - u \;.\;.\;.\;.\;.\; (118).$$

Wir wollen nun suchen, den Bogen z durch Differenziation der vorigen Gleichung zu eliminiren; man erhält:

$$dx = dz - du \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (119).$$

Um den Werth von dz als Funktion von u auszudrücken, bemerke man, dass zwischen u und z folgende Relation Statt habe:

$$u = \text{Sin. } z.$$

Wird diese Gleichung nach Art. 42, differenziirt, so findet man:

$$du = dz \frac{\text{Cos. } z}{a},$$

hieraus

$$dz = \frac{adu}{\text{Cos. } z};$$

in diese Gleichung substituire man für Cos. z seinen Werth aus

$$\text{Sin.}^2 z + \text{Cos}^2 z = a^2,$$

oder vielmehr aus

$$u^2 + \text{Cos.}^2 z = a^2,$$

wodurch man erhält:

$$dz = \frac{adu}{\sqrt{a^2 - u^2}};$$

wird dieser Werth in die Gleichung (119) eingeführt, so ändert sie sich in folgende:

$$dx = \frac{adu}{\sqrt{a^2 - u^2}} - du \; (120).$$

Man darf nun nur noch u durch y ausdrücken. Es sei desshalb O der Mittelpunkt des Erzeugungskreises BMR, Fig. 39, (so nennt man den auf der geraden Linie fortrollenden Kreis, die Gerade selbst Grundlinie), so ist:

$$OE = \sqrt{MO^2 - ME^2}$$

oder

$$a - y = \sqrt{a^2 - u^2} \;\ldots\ldots\; (121).$$

Wird diese Gleichung zum Quadrat erhoben und reducirt, so entsteht:

$$u = \sqrt{2ay - y^2} \;\ldots\ldots\; (122),$$

und durch Differenziation

$$du = \frac{(a - y)\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}} \;\ldots\ldots\; (123).$$

Durch die Gleichungen (121) und (123) wird jene (120) in folgende umgeformt:

$$dx = \frac{ady}{\sqrt{2ay - y^2}} - \frac{(a - y)\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}};$$

nach geschehener Reduction:

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

und diess ist die Gleichung der Cycloide.

201) Die Gleichung der Cycloide lässt sich auch als Funktion des Bogens auf folgende Art entwickeln.

Die Gleichung u = Sin. z giebt:

$$z = \text{Bog. (Sin.} = u);$$

für u seinen Werth aus (122) gesetzt,

$$z = \text{Bog. (Sin.} = \sqrt{2ay - y^2});$$

dieser Werth und jener von u in die Gleichung (118) eingeführt erzeugen:

$$x = \text{Bog. (Sin.} = \sqrt{2a - y^2}) - \sqrt{2ay - y^2} \text{ *)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (124).$$

*) Der Sinus entspricht hier einem Halbmesser a; derjenige der Tafeln, welcher zum Halbmesser die Einheit hat, wäre

202) Bevor diese Gleichung discutirt wird, ist zu beweisen, dass y weder negativ, noch grösser als 2a sein kann. Denn macht man $y = -y'$, so geht der Ausdruck Bog. (Sin. $= \sqrt{2ay - y^2}$) in folgenden über: Bog. (Sin. $= \sqrt{-2ay - y^2}$), also ein unmöglicher Werth. Setzte man ferner $y = 2a + \delta$, so erhielte man einen imaginären Werth Bog. (Sin. $= \sqrt{-2a\delta - \delta^2}$) für Bog. (Sin. $= \sqrt{2ay - y^2}$); wenn man also in einer Entfernung $EF = 2a$ der Axe der x eine Parallele AB, Fig. 40, zu CD gehen lässt, so befindet sich die Curve zwischen diesen Parallelen CD und AB eingeschlossen; der grösste Werth, den y haben kann, ist 2a; denn lässt man den Erzeugungskreis von A nach C, Fig. 41, sich wälzen, so wird der Punkt M, welcher sich in A befindet, nach und nach hinaufsteigen, bis er zu B dem Endpunkte des Durchmessers BD gelangt; dann ist die Abscisse $AD = DEB$, gleich dem halben Umfange des Erzeugungskreises.

Dieses Resultat stimmt ganz mit dem überein, welches uns die Gleichung (124) lieferte, weil man für $y = 2a$ erhält:

$$x = \text{Bog. (Sin.} = 0);$$

der Bogen aber, dessen Sinus Null ist, kann nur einer von folgenden sein: o, DEB, 2DEB, 3DEB . . .; woraus erhellet, dass für den gegenwärtigen Fall DEB dieser Bogen ist.

Ist nun der Punkt M nach B gekommen, so hat er den Bogen AB der Cycloide beschrieben; setzt er seine Bewegung fort, so wird er einen zweiten dem vorigen ähnlichen Bogen BC beschreiben. Setzt der Erzeugungskreis seine Bewegung auf der Axe der Abscisse continuirlich fort, so beschreibt der Punkt M eine unendliche

$\frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}$; wollte man diesen Sinus einführen, so müsste man schreiben $x = a\,\text{Bog.}\left(\text{Sin.} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$.

(Anmerk. d. Verf.)

Reihe Cycloiden-Bögen, Fig. 42, CB′C″, C″B″C‴;... Der Erzeugungskreis kann sich auch von A nach A″ bewegen, in diesem Falle beschreibt wiederum der Punkt M eine unendliche Reihe Bögen, AB′A′, A′B″A″, ... Alle diese Bögen zusammengenommen machen das aus, was man im allgemeinsten Sinne unter *Cycloide* versteht.

203) Die Normale des Punktes M, dessen Coordinaten x und y sind, Fig. 43, wird durch die Formel, Art. 70, gegeben:

$$\textit{Normale} = y \sqrt{\frac{dy^2}{dx^2} + 1};$$

wird hierin der Werth von $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung für die Cycloide gesetzt, so hat man:

$$\textit{Normale} = y \sqrt{\frac{2ay - y^2}{y^2} + 1} = \sqrt{2ay}.$$

Um diesen Werth zu construiren ziehe man die Sehne MD, Fig. 43, wodurch man erhält:

$$DE : MD = MD : DB,$$

oder

$$y : MD = MD : 2a,$$

folglich

$$\textit{Sehne}\ MD = \sqrt{2ay};$$

und da wegen der Eigenschaft des Zirkels der Winkel BMD ein Rechter ist, so steht die Sehne MB senkrecht auf dem Endpunkte der Normale MD auf; daher ist die verlängerte Sehne MB eine Tangente der Cycloide am Punkte M; bekanntlich bilden die Tangente und die Normale unter sich einen rechten Winkel. Man könnte also die Tangente an den Punkt M ziehen, wenn man einen halben Erzeugungskreis BMD beschriebe, und die Sehne BM verlängerte; damit man aber nicht an jeden Punkt der Curve diesen halben Erzeugungskreis zu beschreiben braucht, ist es schon hinreichend, den halben Erzeugungskreis auf der grössten Ordinate BD, Eig. 44, der Cycloide zu construiren, und nachdem man von dem

Punkte M auf BD die Senkrechte ME herabgelassen hat, ziehe man die Sehne BC, darauf MF parallel zu dieser Sehne und MT wird die verlangte Tangente sein, wovon der Beweis nur eine Folge des Vorhergehenden ist.

204) Um den Ausdruck für den Krümmungshalbmesser zu finden, muss man aus der Gleichung dieser Curve die Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ableiten, welche alsdann in den Ausdruck für den Krümmungshalbmesser, Art. 150,

$$\gamma = -\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

eingeführt werden, wo das negative Zeichen angenommen ist, weil die Curve ihre hohle Seite der Axe der x zukehrt. Die Gleichung der Cycloide giebt alsdann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{y} \; \dots\dots \; (125).$$

Man setze $\frac{dy}{dx} = p$ um $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu erhalten; alsdann ist:

$$p = \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2a}{y}+1}.$$

Durch Differenziation, Art. 23,

$$dp = -\frac{\frac{2a}{y^2}\,dy}{2\sqrt{\frac{2a}{y}-1}} = -\frac{a\,dy}{y\sqrt{2ay-y^2}};$$

folglich

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{a}{y\sqrt{2ay-y^2}}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch (125), so ergiebt sich, Art 24,

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{a}{y^2}, \text{ oder } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2};$$

vermittelst dieser Werthe hat man:

$$\gamma = \frac{\left(\frac{2a}{y}\right)^{3/2}}{\frac{a}{y^2}} = \frac{(2a)^{3/2}}{\frac{ay^{3/2}}{y^2}} = \frac{2^{3/2} a^{1/2}}{y^{-1/2}};$$

lässt man y in den Nenner übergehen,

$$\gamma = 2^{3/2} . a^{1/2} . y^{1/2} = 2 . 2^{1/2} a^{1/2} y^{1/2} = 2\sqrt{2ay};$$

folglich ist der Krümmungshalbmesser MM′ Fig. 15, der Cycloide der doppelten Normale MR gleich.

205) Durch Substitution der Werthe für $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, in die Formeln, Art. 149, erhält man für die Gleichung der Evolute:

$$y - \beta = -\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$x - \alpha = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -(y - \beta)\frac{dy}{dx},$$

und hieraus

$$y - \beta = \frac{\frac{2a}{y}}{\frac{a}{y^2}} = 2y;\ x - \alpha = -2\sqrt{2ay - y^2},$$

folglich

$$\beta = -y,\ \alpha = x + 2\sqrt{2ay - y^2},$$

oder, Fig. 16,

$$QM' = MP;\ \alpha = AP + 2ME;$$

bemerkt man, dass AP + ME = AR = Bog. AR, so lässt sich die letztere Gleichung durch folgende Form darstellen:

$$\alpha = \text{Bog. } MR + ME \ldots\ldots (126).$$

Wird BR verlängert, RL = BR = 2a gemacht, und über RL der Halbkreis RM'L beschrieben, so geht dieser Halbkreis wegen der gleichen Sehnen M'R und MR durch den Punkt M'; hiedurch erhält man:

$$\text{Bog. MR} = \text{Bog. M'R}, \text{ und ME} = \text{M'E'}.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung (126) eingeführt: so ist:

$$\alpha = \text{Bog. M'R} + \text{M'E'},$$

mithin

$$\alpha = \text{Bog. M'R} + \sqrt{2a\beta - \beta^2} \; \ldots \; (127).$$

Diess ist die Gleichung zwischen den Coordinaten $AQ = \alpha$ und $QM' = \beta$ eines Punktes M' der Evolute.

Man verlängere nun die Ordinate $DC = 2a$ um eine Grösse $DA' = 2a$, Fig. 46, lasse durch A' zu AD die Parallele A'D' gehen, verlege den Anfangspunkt A nach A', setze $A'Q' = \alpha'$, $Q'M' = \beta$, so hat man für die Abscisse

$$A'Q' = AD - AQ,$$

oder

$$\alpha' = \tfrac{1}{2} \textit{ Umkreis des Erzeugungskreises} - AQ,$$

oder

$$\alpha' = \pi a - \alpha;$$

für die Ordinate β' erhält man:

$$M'Q' = A'D - QM',$$

oder

$$\beta' = 2a - \beta.$$

Aus diesen Gleichungen leitet man ab:

$$\alpha = \pi a - \alpha'; \; \beta = 2a - \beta';$$

durch diese Werthe wird die Gleichung (127) in folgende umgeformt:

$$\pi a - \alpha' = \text{Bog. M'R} + \sqrt{2a\beta' - \beta'^2},$$

oder

$$\pi a - \alpha' = \text{Bog. RM'L} - \text{Bog. B'L} + \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}$$
$$= \pi a - \text{Bog. M'L} + \sqrt{2a\beta' - \beta'^2},$$

folglich

$$\alpha' = \text{Bog. M'L} - \sqrt{2a\beta' - \beta'^2},$$

da diese Gleichung derjenigen für die Cycloide gleicht, erhellet, dass die Evolute einer Cycloide wiederum eine Cycloide ist.

206) Dieses lässt sich auf folgende Art auch synthetisch beweisen, dass nämlich die Evolute AA′, Fig. 46, eine Cycloide ist.

Man hat:

$$\text{Bog. } LM' + \text{Bog. } RM' = \pi a,$$

also

$$\text{Bog. } LM' = \pi a - \text{Bog. } RM';$$

ferner Art. 199,

$$\text{Bog. } RM' = \text{Bog. } MR = AR;$$

wird dieser Werth in die vorige Gleichung eingeführt, so erhält man:

$$\text{Bog. } LM' = \pi a - AR = AD - AR,$$

oder

$$\text{Bog. } LM' = LA',$$

diess ist die Eigenschaft der Cycloide.

Von Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

207) Wenn eine Formel, welche Differenzial-Coëfficienten enthält, gegeben ist, so können diese nur mit Hilfe der Gleichung für die Curve, worauf man diese Formel anwenden will, eliminirt werden. Ist z. B. die Formel

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx}$$

gegeben, und man verlangt zu wissen, was aus ihr wird, wenn die Curve eine Parabel ist, so leite man aus der Gleichung $y = ax^2$ für die Parabel die Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ab, substituire sie in diese Formel, alsdann werden die Differenzial-Coëfficienten daraus verschwinden. Werden $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ als unbekannt betrachtet, so müssen überhaupt zwei Gleichungen vorhanden sein, um sie aus

einer Formel zu eliminiren; diese Gleichungen erlangt man, wenn die Gleichung der Curve zweimal nacheinander differenziirt wird.

208) Wenn bei algebraischen Operationen die dx nicht mehr unter dy vorkommen, wie diess in folgender Formel der Fall ist:

$$\frac{y\,(dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dy^2 - yd^2y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (128),$$

so wird die Substitution vorgenommen, indem man dx, dy, d^2y als unbekannt annimmt; und weil man zur Elimination dieser Ausdrücke eben so viele Gleichungen haben muss, so scheint es zwar, dass die Elimination nicht Statt finden könne, indem man durch Differenziation der Gleichung für die Curve nur zwei Gleichungen zwischen dx, dy und d^2y erhalten kann; es ist aber zu bemerken, dass in der Formel, welche aus der Elimination des dy und d^2y vermittelst dieser beiden Gleichungen hervorgeht, ein gemeinschaftlicher Faktor dx^2 vorkömmt, der daraus verschwinden wird.

Behält man z. B. die Parabel bei, für welche $y^2 = ax^2$; differenziirt man zweimal nacheinander diese Gleichung, so erhält man:

$$dy = 2axdx;\ d^2y = 2adx^2.$$

Werden diese Werthe in (128) eingeführt, und der gemeinschaftliche Faktor dx^2 weggelassen, so erhält man:

$$\frac{y\,(1 + 4a^2x^2)}{+ 4a^2x^2 - 2ay}.$$

209) Es ist leicht zu begreifen, warum dx^2 ein gemeinschaftlicher Faktor wird; denn sobald man in der Formel, welche ursprünglich $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ enthielt, den Nenner von $\frac{d^2y}{dx^2}$ entfernt hatte, so mussten alle Glieder ausser jenen, welche mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{dy}{dx}$ behaftet sind, den

gemeinschaftlichen Faktor dx^2 erhalten, da dann in den Gliedern mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ behaftet kein dx mehr vorkömmt, während die Glieder, welche durch $\frac{dy}{dx}$ vervielfacht waren, dx im ersten Grade enthalten; denn das Produkt $\frac{dy}{dx}$ in dx^2 wird dydx. Differenziirt man hierauf die Gleichung für die Curve, so erhält man Resultate von folgender Form: $dy = Mdx$, $d^2y = Ndx^2$; werden diese Werthe in d^2y und dydx eingeführt, so verwandeln sich diese Glieder, wie auch die andern, in Produkte von dx^2.

210) Was bisher von einer Formel, welche Differenziale der ersten und zweiten Ordnung enthält, gesagt wurde, lässt sich auch auf jene Formeln anwenden, welche höhere Differenziale enthalten. Hieraus folgt, dass man durch eine so oft als nöthig wiederholte Differenziation der Gleichung für die Curve die Differenziale, welche sich in der gegebenen Formel befinden, entfernen kann.

211) Dasselbe findet jedoch nicht Statt, wenn ausser den bisher betrachteten Differenzialen auch d^2x, d^3x, . . . vorkommen; denn man nehme an, dass z. B. folgende Differenziale dx, dy, d^2x, d^2y sich in dieser Formel befinden; differenziirte man zweimal nacheinander die Gleichung $y = fx$, so erhielte man folgende Gleichungen:

$$F(x, y, dy, dx,) = o, \quad F(x, y, dx, d^2x, d^2y) = o,$$

woraus man nur zwei von den drei Differenzialen dy, d^2x, d^2y eliminiren könnte. Hieraus erhellet die Unmöglichkeit, alle Differenziale aus der Gleichung wegzuschaffen. Hier giebt es aber eine in d^2x verborgene Bedingung, dass nämlich die Veränderliche x selbst als eine Funktion einer dritten Veränderlichen, welche nicht in der Formel vorkommt, betrachtet werden kann; diese dritte Veränderliche heisst *unabhängige Veränderliche*.

Diess ist keinem Zweifel unterworfen, wenn man bedenkt, dass die Gleichung $y = fx$ von zwei andern

$y = Ft$, $y = \varphi t$ hergeleitet werden könnte, aus welchen t eliminirt wäre. So z. B. entsprang die Gleichung $y = a\,\frac{(x - c)^2}{b^2}$ aus $x = bt + c$, $y = at^2$, woraus zugleich hervorgeht, dass x und y vermöge des Zuwachses, welchen t erhält, variiren müssen; allein diese Hypothese, dass x und y nach Verhältniss des dem t gegebenen Zuwachses variiren, setzt voraus, dass zwischen x und t, zwischen y und t Beziehungen Statt finden; eine dieser Beziehungen ist willkührlich; denn die Gleichung, welche allgemein durch $y = fx$ vorgestellt ist, sei z. B.

$$y = a\,\frac{(x - c)^2}{b^2}$$

und man giebt dem x die beliebige Beziehung $x = \frac{t^3}{c^2}$, so erzeugt dieser Werth in die vorige Gleichung eingeführt folgende:

$$y = a\,\frac{(t^3 - c^3)^2}{b^2 c^4},$$

woraus man, verglichen mit $x = \frac{t^3}{c^2}$, durch Elimination $y = a\,\frac{(x - c)^2}{b^2}$ erhält, und diess ist die einzige Bedingung, worauf man bei der Wahl der Veränderlichen t achten muss.

212) Da man also die unabhängige Veränderliche t nach Gefallen bestimmen kann, so nehme man z. B. die Sehne, den Kreisbogen, die Abscisse oder die Ordinate für die unabhängige Veränderliche. Wird durch t der Bogen einer Curve bezeichnet, so muss man $t = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ haben; bedeutet t die Sehne, und ist der Anfangspunkt im Scheitel der Curve, so wird $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ sein;

bezeichnet endlich t entweder die Abscisse, oder die Ordinate, so ist für den ersten Fall $t = x$, für den zweiten $t = y$.

213) Die Wahl der einen von diesen Hypothesen, oder jeder andern wird durchaus nothwendig, damit die Formel von den in ihr enthaltenen Differenzialen befreit werden kann; geschieht diess nicht immer, so setzt man stillschweigend voraus, dass die unabhängige Veränderliche bestimmt worden sei. In dem allergewöhnlichsten Falle z. B., wo eine Formel nur die Differenziale dx, dy, d^2y, d^3y, . . . enthält, setzt man die Bedingung voraus, dass die unabhängige Veränderliche für die Abscisse genommen wurde; denn alsdann ist

$$t = x;\ \frac{dx}{dt} = 1;\ \frac{d^2x}{dt^2} = 0;\ \frac{d^3x}{dt^3} = 0; \ldots$$

woraus man sieht, dass die Formel kein Differenziale der zweiten, dritten, . . . Ordnung enthalten soll.

214) Um die Formel in ihrer grössten Allgemeinheit aufzustellen, müssen nach dem Vorhergehenden x und y Funktionen einer dritten unabhängigen Veränderlichen t sein, und, Art. 24,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt};$$

hieraus leitet man ab;

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \ldots\ldots\ldots\ldots (129).$$

Nimmt man das zweite Differenzial von y, und verfährt mit dem zweiten Gliede, wie Art. 19, mit den Brüchen, so findet man:

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt}}{\frac{dx^2}{dt^2}};$$

in diesem Ausdrucke ist dt von doppeltem Gebrauche; einmal dient es anzuzeigen, welche die unabhängige Veränderliche ist, und dann als algebraisches Zeichen, unter welcher letztern Rücksicht dt auch allein betrachtet werden kann, wenn wir nicht aus dem Auge lassen, dass t die unabhängige Veränderliche ist. Lässt man alsdann den gemeinschaftlichen Faktor dt^2 weg, so kann der vorige Ausdruk folgende Form annehmen, nämlich:

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2};$$

wird beiderseits durch dx dividirt,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

215) Verfährt man eben so mit der Gleichung (129); so ist offenbar, dass wenn man t als die unabhängige Veränderliche betrachtet, der zweite Theil der Gleichung dem ersten identisch sei; wenn folglich t als die unabhängige Veränderliche angenommen wird, darf man nur eine Verwechslung in der Formel, welche die Differenzial-Coëfficienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ enthält, vornehmen d. h. diesen zweiten Differenzial-Coëfficienten ersetzen durch

$$\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

Um diese Betrachtungen auf den Krümmungshalbmesser anzuwenden, der durch die Gleichung, Art. 186,

$$\gamma = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

gegeben ist, ändere man diese Gleichnng in folgende um, im Falle man γ für die unabhängige Veränderliche t ausdrücken will,

$$\gamma = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}}{\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}};$$

bemerkt man, dass der Zähler dieses Bruchs übergeht in $\frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx^3}$, so ist:

$$\gamma = \frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (130).$$

216) Bei diesem Werthe von γ setzt man also voraus, dass x und y Funktionen einer dritten unabhängigen Veränderlichen seien; wäre nun x selbst diese Veränderliche, d. i. $x = t$, so hätte man $d^2x = o$, wodurch die vorige Formel wiederum die gewöhnliche Form annehmen würde,

$$\gamma = \frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx\,d^2y} = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

217) Wollte man anstatt x als unabhängig veränderlich, die Ordinate unter diesem Gesichtspunkte betrachten, so würde diese Bedingung durch die Gleichung $y = t$ ausgedrückt, und durch zweimal wiederholte Differenziation dieser Gleichung erhielte man:

$$\frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = o.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt an, dass y die unabhängige Veränderliche ist, wodurch die zweite Formel unverändert bleibt; die zweite hingegen, dass d^2y Null ist, mithin (130) übergeht in

$$\gamma = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dy\,d^2x}.$$

218) Es ist zu bemerken, dass wenn x die unabhängige Veränderliche, mithin $d^2x = o$ ist, diese Gleichung andeute, dx sei constant. Hieraus folgt, dass überhaupt die Veränderliche, welche als unabhängig betrachtet wird, immer ein constantes Differenzial habe.

219) Nimmt man zuletzt den Bogen für die unabhängige Veränderliche, so hat man

$$dt = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

wird zum Quadrat erhoben, und durch dt^2 dividirt, so erhält man:

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = 1.$$

Betrachtet man bei der Differenziation t als beständig, Art. 218, und verfährt nach der Regel für die Exponenten, so findet man:

$$\frac{2dx\, d^2x}{dt^2} + \frac{2dy\, d^2y}{dt^2} = 0,$$

hieraus

$$dx\, d^2x = -dy\, d^2y.$$

Substituirt man also entweder den Werth von d^2x oder d^2y in (130), so hat man im ersten Falle:

$$\gamma = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{(dx^2 + dy^2)d^2y} . dx = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{d^2y} . dx;$$

im zweiten:

$$\gamma = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{(dx^2 + dy^2)d^2x} . dy = -\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2}}{d^2x} . dy.$$

220) In dem Vorhergehenden haben wir nur die zwei Differenzial-Coëfficienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ betrachtet; fänden sich aber in der Formel auch Differenzial-Coëfficienten höherer Ordnungen, so müsste man durch ähnliches Verfahren die Werthe von $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, ... bestimmen, die sich auf den Fall beziehen, in welchem x und y Funktionen einer dritten unabhängigen Veränderlichen sind.

Von der Methode des unendlich Kleinen.

221) Die Begriffe, die wir vom Unendlichen haben, lassen sich auf folgenden Satz zurückbringen. Eine Grösse ist nicht unendlich, wenn sie einer Vermehrung fähig ist.

Folglich wenn man $x + a$ hat, und x soll unendlich werden, so muss man a aufheben, denn sonst wäre zu vermuthen, dass x noch um a vermehrt werden könnte, was aber dem Begriffe widerspricht.

222) Da diess ein Hauptgrundsatz ist, so habe ich mich bemüht, ihn auf eine genügende Art zu beweisen. Es sei die Gleichung:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{x} = M \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (131);$$

vervielfacht man durch ax, so ist:

$$x + a = Max \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (132).$$

Man nehme nun an, x werde unendlich, und der Bruch $\frac{1}{x}$ habe den letzten Grad seines Abnehmens erreicht, da er dann offenbar auf Null reducirt wird; in diesem Falle geht die Gleichung (131) in folgende über:

$$M = \frac{1}{a}.$$

Wird dieser Werth in die Gleichung (132) eingeführt, so erhält man:

$$x + a = x;$$

hieraus erhellet, dass wenn x unendlich ist, $x + a$ auf x reducirt werde.

223) Die Grösse a, für welche x unendlich wird, nennt man *unendlich klein* in Hinsicht x.

224) Da wir hier nur die Verhältnisse der Grössen betrachten, so gilt der vorige Beweis auch dann noch, wenn x einen unendlichen Werth hat, mit der Einschränkung jedoch, dass a unendlich klein sei hinsichtlich x. Durch die Lehre von den Brüchen wird uns diese Wahrheit noch deutlicher vor die Augen treten. Für wahr wenn man die endliche Grösse b mit dem Bruche $\frac{b}{z}$ vergleicht, so ist gewiss, dass je grösser

der Nenner z wird, desto geringer der Werth des Bruches sei, dass also dieser Bruch nothwendig in Null übergehe, wenn z unendlich geworden ist, kann folglich hinsichtlich b, welches alsdann gegen $\frac{b}{z}$ unendlich ist, ausgelassen werden.

225) Wenn gleich zwei Grössen unendlich klein sind, so folgt daraus noch nicht, dass ihr Verhältniss Null sei. Denn:

$$\frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty} = a : b.$$

Man sieht übrigens ein, dass zwei unendlich kleine Grössen sich verhalten können, wie zwei sehr grosse Grössen. Bezeichnet man also zwei unendlich kleine Grössen durch dx und dy, so folgt daraus, dass ihr Verhältniss $\frac{dy}{dx}$ nicht Null sein werde; dieses Resultat stimmt ganz mit dem über ein, welches wir aus der Betrachtung der Gränzverhältnisse erhielten.

226) Wenn eine Grösse x in Betracht einer andern endlichen Grösse a unendlich klein ist, so ist auch das Quadrat x^2 für x unendlich klein. Wirklich beweisst uns die Proportion

$$1 : x = x : x^2,$$

dass x^2 so oft in x enthalten ist, als x in der Einheit, d. i. unendlichmal. Eben so würde man durch die Proportion:

$$x : x^2 = x^2 : x^3$$

beweisen, dass wenn x^2 in Betracht zu x unendlich klein ist, das Glied x^3 hinsichtlich x^2 unendlich klein sein muss. Aus diesem Grunde hat man das unendlich Kleine in verschiedene Ordnungen abgetheilt. So ist in den vorigen Beispielen x ein unendlich kleines der *ersten*, x^2 der *zweiten*, x^3 der *dritten* Ordnung, u. s. w.

227) Man bemerke, dass wenn x ein unendlich Kleines gegen a ist, es auch x multiplicirt durch eine end-

liche Grösse b sein werde. Denn da man x als einen Bruch mit einem unendlichen Nenner betrachten kann, so wenn man z. B. x durch $\frac{c}{\infty}$ vorstellte, so folgt, dass $\frac{c}{\infty}$ oder $\frac{bc}{\infty}$ nicht viel weniger als Null sind, wenn man sie gegen a betrachtet.

228) Eben so muss man ein unendlich Kleines der ersten Ordnung unterdrücken, wenn es mit einer endlichen Grösse, die nicht vermehrt werden kann, in Verbindung steht; ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung, wenn es an der Seite des unendlich Kleinen der ersten Ordnung steht; u. s. w. Hätte man z. B. folgenden Ausdruck:

$$a + by + cy^2 + dy^3,$$

worin y ein unendlich kleines der ersten Ordnung, so wird cy^2 ein unendlich kleines der zweiten, dy^3 der dritten Ordnung sein; man muss daher dy^3 auslassen, weil dy^3 das Glied cy^2 nicht vermehren kann; und da cy^2 ebenfalls die Grösse b nicht vermehren kann, so streiche man es auch weg, wenn es die Reihe trifft; letztlich wird man auch by weglassen können, weil dieses unendlich Kleine der ersten Ordnung die endliche Grösse a nicht vermehren kann, mithin bleibt nur noch a stehen.

229) Zwei unendlich kleine Grössen x und y haben zu ihrem Produkte ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung. Man erhält nämlich aus dem Produkte xy die Proportion

$$1 : y = x : xy,$$

welche anzeigt, dass da y unendlich klein in Hinsicht 1 ist, xy es auch hinsichtlich x, d. i. ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung sein werde.

230) Eben so liesse sich beweisen, dass das Produkt dreier unendlich kleinen Grössen der ersten Ordnung ein unendlich Kleines der dritten Ordnung sei.

231) Nun sind wir im Stande die Regeln der Differenziation für die Methode des unendlich Kleinen zu erklären. Nimmt man desshalb an, die Veränderliche x einer Funktion von x erhalte den Zuwachs dx, so ist der Unterschied zwischen diesem neuen Zustande und dem ursprünglichen das Differenzial dieser Funktion.

232) Um z. B. das Differenzial von ax zu erhalten, ziehe man von der Funktion $a(x + dx) = ax + adx$ die ursprüngliche ax ab, so bleibt adx für das Differenzial.

233) Man suche ferner das Differenzial von ax^3; hier muss man ax^3 von $a(x + dx)^3$ abziehen. Entwickelt man diese Potenz, und reducirt, so findet man $3ax^2dx + 3axdx + adx^3$. Da adx^3 ein unendlich Kleines der dritten Ordnung ist, so wird dadurch $3axdx^2$ nicht vermehrt, folglich kann man adx^3 weglassen. Eben so muss $3axdx^2$ als unendlich Kleines der zweiten Ordnung vernachlässigt werden, weil $3ax^2dx$ ein unendlich Kleines der ersten Ordnung ist; endlich bleibt $3ax^2dx$ als Differenzial übrig.

234) Nach diesem Grundsatze wird man jede andere Funktion von x differenziiren, indem man Sorge trägt, die unendlich kleinen Theile höherer Ordnungen aufzuheben, was eben so viel heisst, als das erste Glied der Entwicklung allein beibehalten, was auch bei der Methode den Gränzverhältnisse geschieht.

Um z. B. das Differenzial von fx zu erhalten, würde man, anstatt

$$\frac{f(x + h) - fx}{h} = A + Bh + Ch^2 + \ldots$$

zu schreiben, wo dann im Falle der Gränzverhältnisse $\frac{dfx}{dx} dx = Adx$ das Differererenzial ist, auf folgende Art darstellen:

$$f(x + h) = fx + Adx + Bdx^2 + \ldots$$

wird die ursprüngliche Funktion abgezogen, so bleibt

$$Adx + Bdx^2 + Cdx^2 + \ldots;$$

und da man das unendlich Kleine höherer Ordnungen weglassen muss, behält man nur das Glied Adx übrig, welches das gesuchte Differenzial ist.

235) Bei Aufsuchung des Differenzials eines Produkts zweier Veränderlichen y, z muss man annehmen, dass wenn x in x + dx, auch y in y + dy, und z in z + dz übergehe. Das Produkt yz wird sich alsdann in (y + dy) (z + dz) verwandeln; wird wirklich vervielfacht und yz abgezählt, so bleibt ydz + zdy + dydz. Da das letztere Glied dieses Resultats ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung ist, muss man es anfheben, und man behält für das Differenzial von yz den Ausdruck ydz + zdy.

236) Aus diesem letztern Differenzial leitet man nach und nach dasjenige eines Produkts dreier Veränderlichen, und zuletzt das von x^m ab durch das Verfahren, dessen wir bei der Methode der Gränzverhältnisse uns bedienten.

237) Man erhält sehr leicht das Differenzial von a^x, wenn man a^{x+dx} entwickelt, welches eben so wie a^{x+h}, Art. 36, bewerkstelligt wird; man bestimme hierauf den Werth von $a^{x+dx} - a^x$, und werfe alle folgenden Glieder als unendlich Kleine niederer Ordnungen, wie die des Gliedes, welches man beibehält, ausser dem ersten weg. Aus dem Differenzial von a^x leitet man, wie oben geschehen ist, das Differenzial des Log. x ab.

238) Für das Differenzial von Sin. x hat man:

Sin. (x + dx) – Sin. x = Sin. x Cos. dx + Sin. dx Cos. x – Sin.x;

da der Kreisbogen x unendlich klein ist,

Cos. dx = 1, und Sin. dx = dx;

mit Hilfe dieser Werthe findet man:

D. Sin. x = dx Cos. x.

239) Die Aufgabe der Tangenten war zum Theil Veranlassung zum Ursprunge der Differenzialrechnung. Diese Aufgahe wird vermittelst der Methode des unendlich Kleinen auf folgende Art aufgelöst.

Es seien PM und P′M′, Fig. 47, zwei unendlich nahe Ordinaten, und MO parallel zur Axe der Abscisse; die Tangente MT wird als die Verlängerung des Curven-Elements MM′ angesehen werden können, weil dieses Element als ein sehr kleiner Theil, in gerader Linie betrachtet wird. Es heisse AP, x; PM, y; der Zuwachs von x sei PP′ $=$ dx, und der von y wird MO $=$ dy sein. Das unendlich kleine Dreieck MM′O ist dem Dreiecke MPT ähnlich, mithin

$$M'O : MO = MP : PT$$

oder

$$dy : dx = y : PT$$

daraus

$$PT = y \cdot \frac{dx}{dy}.$$

Man findet hierauf die Normale, Tangente, und die Gleichungen dieser Linien, wie in Art. 70 und 71.

240) Um das Differenzial eines Bogens zu finden, betrachte man den Bogen, zwischen den sich unendlich nahen Ordinaten PM, P′M′ als eine gerade Linie; dann ist, wenn der ganze Bogen s genannt wird,

$$MM'^2 = MO^2 + M'O^2$$

oder

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

zieht man die Quadratwurzel aus,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

241) Das Differenzial des Bogens einer Curve mit Polar-Coordinaten lässt sich sehr leicht, vermittelst des unendlich Kleinen, auffinden.

Es seien RR′ und MN, Fig. 82, zwei Kreisbögen, der eine mit einem Halbmesser $=$ 1, der andere mit einem Halbmesser u zwischen den Schenkeln des unendlich kleinen Winkels MA′M, welche zwei Fahrstrah-

len sind, beschrieben; das Dreieck NM′M wird als geradliniegt, und in N rechtwinklicht betrachtet werden können; daher

$$MM' = \sqrt{NM'^2 + NM^2};$$

bemerkt man, dass NM′ = du, und MN = udt vermöge der Proportion

$$1 : dt = u : MN,$$

so kann man für NM′ und MN ihre Werthe setzen; wird ds für MM′ geschrieben, so ist:

$$ds = \sqrt{du^2 + u^2dt^2}.$$

Derselbe Triangel NM′M, verglichen mit M′AT, führt zur Subtangente einer Polar-Curve vermöge der Proportion

$$M'N : MN = AM' : AT,$$

oder AM für AM′, welche Grössen nur um ein unendlich Kleines voneinander verschieden sind,

$$du : udt = u : AT,$$

und hieraus

$$AT = u^2 \frac{dt}{du}.$$

Ueber Lagrange's Methode, die Grundsätze der Differenzialrechnung ohne Betrachtung der Gränzverhältnisse, oder des unendlich Kleinen, oder jeder verschwindenden Grösse herzuleiten.

242) Wir haben oben den Nutzen der Taylorschen Formel bei Entwicklung der Funktionen in Reihen kennen gelernt. Lagrange, welcher glaubte, die Grundsätze der Differenziation wären in diesem Lehrsatze enthalten, gelangte zu seinem Beweise, ohne von der Differenzialrechnung Gebrauch zu machen, auf folgende modificirte Weise.

Es sei $y = f(x + h)$; vermöge der Natur dieser Funktion muss $f(x + h)$ in fx übergehen, wenn $h = o$ wird, und dieses findet Statt, wenn der Theil dieser

Gleichung, welcher h enthält, ein Vielfaches von h ist. Wird dieses durch Ph bezeichnet, so hat man:

$$f(x + h) = fx + Ph;$$

da P eine Funktion von h sein kann, so hat man, wenn durch p bezeichnet wird, was P wird, sobald h = o, und durch Qh den von h abhängigen Theil, P = p + Qh. Setzt man diese Schlüsse weiter fort, so ergiebt sich folgende Reihe von Gleichungen:

$$y = fx + Ph,$$
$$P = p + Qh,$$
$$Q = q + Rh,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Wird in die erste Gleichung der Werth von P aus der zweiten gesetzt, so ist:

$$y = fx + ph + Qh^2;$$

in dieses Resultat für Q seinen Werth aus der dritten Gleichung gesetzt, giebt:

$$y = fx + ph + qh^2 + Rh^3;$$

fährt man so fort, und setzt dann f (x + h) für y, so erhält man allgemein:

$$f(x + h) = fx + ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + \ldots (130).$$

243) Der Ausdruck f (x + h) bezeichnet überhaupt die Funktion, welche noch nicht in eine Reihe entwickelt ist. Wird in dieser Funktion x in x + i verwandelt, so wird man zu demselben Resultate gelangen, als wenn man h + i für h gesetzt hätte. Diese Funktion kann kein x enthalten, ohne dass auf diese Veränderliche unmittelbar h folge, ein Glied also, wie $A(x + h)^m$ wird, wenn man x in x + i verwandelt, $A(x + i + h)^m$, welche Grösse mit $A(x + h + i)^m$ einerlei ist, und die man erhalten hätte, wenn h + i für h in $A(x + h)^m$ substituirt worden wäre. Was von diesem einzelnen Gliede gilt, muss sich auf alle übrigen anwenden lassen; hieraus folgt, dass in beiden Annahmen der erste Theil

der Gleichung (133) identische Resultate gebe, und also die Entwicklung $fx + ph + qh^2 + rh^3 + \ldots$ zu demselben Ziele führe, ob man $x + i$ für x, oder $h + i$ für h substituirt.

244) Führt man also $h + i$ statt h in $fx + ph + qh^2 + \ldots$ ein, so erhält man:

$$fx + p(h+i) + q(h+i)^2 + r(h+i)^3 + \ldots (134)$$

und nimmt man nur die beiden ersten Glieder eines jeden dieser Binomien, so ist:

$$fx + ph + pi + qh^2 + 2qhi + rh^3 + 3rh^2 + \ldots (135).$$

Um nun das Resultat der Substitution von $x + i$ für x zu erhalten, bemerke man, dass in dieser Reihe, wo h entwickelt vorkömmt, der Zuwachs nicht in fx, und den Coëfficienten $p, q, r, \ldots$ sich finden könne; diese Grössen, die nur x enthalten, müssen also als Funktionen von x betrachtet werden, und da die Gleichung (133) für jede Funktion von x Statt findet, so wird die Substitution von $x + i$ für x ändern:

$$\begin{array}{lll}
fx & \text{in} & fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \ldots\ldots \\
p & \text{in} & p + p'i + p''i^2 + p'''i^3 + p^{IV}i^4 + \ldots\ldots \\
q & \text{in} & q + q'i + q''i^2 + q'''i^3 + q^{IV}i^4 + \ldots\ldots \\
r & \text{in} & r + r'i + r''i^2 + r'''i^3 + r^{IV}i^4 + \ldots\ldots \\
s & \text{in} & s + s'i + s''i^2 + s'''i^3 + s^{IV}i^4 + \ldots\ldots
\end{array}$$

Es bedarf keiner Erinnerung, dass durch die accentuirten Buchstaben die Coëfficienten verschiedener Potenzen von i in den Reihen angezeigt werden.

Werden diese Werthe von $fx, p, q, r, s, \ldots$ in die Reihe ... $fx + ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + \ldots$ eingeführt, so erhält man:

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots + (p + p'i + p''i^2 + \ldots)h$$
$$+ (q + q'i + q''i^2 + \ldots)h^2 + (r + r'i + r''i^2 + \ldots)h^3 + \ldots (136).$$

245) Diese Reihe muss, Art. 243, der durch (135) bezeichneten identisch; also auch die Glieder mit denselben Potenzen von h behaftet unter sich gleich sein; folglich, wenn man die durch h^2i, h^3i vervielfachten Glieder dieser Reihen vergleicht, findet man:

$$p' = 2q;\ q' = 3r;\ r' = 4s,\ \ldots (137).$$

246) In Art. 244, wurde gesagt, dass p überhaupt eine Funktion von x wäre; bezeichnet man nun p durch $f'x$, und durch $f''x$ den Coëfficienten von h in der Reihe von $f'(x+h)$; durch $f'''x$ den Coëfficienten in $f''(x+h)$ u. s. w., so erhält man folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} f(x+h)=fx+hf'x+\text{Glieder}\times h^2+\text{Glieder}\times h^3+\ldots \\ f'(x+h)=f'x+hf'x+\text{Glieder}\times h^2+\text{Glieder}\times h^3+\ldots \\ f''(x+h)=f''x+hf''x+\text{Glieder}\times h^2+\text{Glieder}\times h^3+\ldots \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}\right\}\ldots(138).$$

247) Man hat, vermöge der Bedingung, Art. 246, $p = f'x$; setzt man nun in diese Gleichung $x = x + h$, so erhält man:

$$p+p'h+p''h^2+p'''h^3+\ldots=f'(x+h)\ldots(139).$$

Wird in diese Gleichung der Werth zon $f'(x+h)$ aus der zweiten der Gleichungen (138) eingeführt, so hat man:

$$p+p'h+p''h^2+\ldots f'x+hf''x+\text{Glieder}\times h^2+\text{Glieder}\times h^3+\ldots.$$

Diese Gleichung findet Statt, was auch immer h sei, mithin müssen die Glieder derselben Potenzen von h auch unter sich gleich sein, d. i.

$$p' = f''x.$$

Dieser Werth von p' verwandelt die erste Gleichung von (137) in $f''x = 2q$; hieraus ergiebt sich:

$$q = \tfrac{1}{2}\, f''x;$$

wird in dieser Gleichung x in $x+h$ verwandelt, so ist

$$q+q'h+q''h^2+\ldots=\tfrac{1}{2}\, f''(x+h);$$

für $f''(x+h)$ die dritte der Reihen (138) gesetzt, giebt:

$$q+q'h+q''h^2+\ldots\ \tfrac{1}{2}(f''x+hf'''x\ \text{Glieder}\times h^2+\ldots).$$

Vergleicht man die Glieder, welche durch die erste Potenz von h vervielfacht sind, so ist $q' = \tfrac{1}{2}\, f'''x$, durch welchen Werth die zweite Gleichung (137) in $\tfrac{1}{2}\, f'''x = 3r$ verwandelt wird; hieraus erhält man:

$$r = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot f'''x.$$

Fährt man so weiter fort, so findet man nach und nach die übrigen Coëfficienten der Gleichung (133); und

werden hierin die Werthe von p, q, r, ... gesetzt, so geht jene in diese über:

$$f(x+h) = fx + h f'x + \frac{h^2}{1.2} . f''x + \frac{h^3}{1.2.3} f'''x + \ldots (140).$$

248) Betrachtet man nun die erste der Gleichungen (138), so wird man einsehen, dass $f'x$, als Coëfficient von h in der Reihe f (x + h), nichts anders ist, als was man durch $\frac{D.\,fx}{dx}$ oder durch $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet.

Betrachtet man ferner die zweite Gleichung (138), so wird man erkennen, dass der Coëfficient $f''x$ der ersten Potenz von h in der Entwicklung von $f'(x+h)$ durch $\frac{D.\,f'x}{dx^2}$ d. i. durch $\frac{D.\,\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, u. s. w. dargestellt werden müsse. Schreibt man daher die Werthe von fx, $f'x$, $f''x$, . . . in die Gleichung (140), so wird man finden:

$$f(x+h) = fx + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} . \frac{h^3}{2.3} + \ldots (141).$$

249) Auf diese Art gelangt man, ohne von dem Differenzial-Calcul Gebrauch zu machen, zur Taylorschen Formel. Der Ausdruck $\frac{dy}{dx}$, welcher sich in dieser Formel findet, zeigt das Geschäft an, vermittelst dessen man den Coëfficienten von h in der Reihe von f (x + h) erhält; sobald dieser Coëfficient gefunden ist, so zeigen $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, . . . an, dass durch wiederholte Operation auch die Coëfficienten der übrigen Potenzen von h gefunden werden, so dass man sich nur algebraischer Mittel zu bedienen braucht, um den Werth von $\frac{dy}{dx}$ für jede Funktion zu bestimmen.

Verlangte man z. B. den Werth von $\frac{dy}{dx}$ für x^m zu wissen, so würde man $f(x + h)^m$ in eine Reihe $x^m + mx^{m-1} h + \ldots$ entwickeln, wo $\frac{dy}{dx}$ den Coëfficienten der ersten Potenz von h in dieser Entwicklung anzeigen muss; so erhielte man $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$. Das ganze Verfahren beschränkt sich also darauf, vermittelst der Analysis verschiedene Arten von Funktionen, welche die Algebra liefert, in Reihen zu entwickeln. Dieses Verfahren ist jedoch nicht verschieden von dem, welches wir zur Entwicklung verschiedener Funktionen, woraus durch Combination andere hervorgehen, angewandt haben. So z. B. haben wir die Entwicklungen von a^{x+h}, Log. $(x + h)$, Cos. $(x + h)$, ... gegeben.

250) Diess ist nun eine dritte Methode, vermittelst der die Grundsätze der Differenzialrechnung unabhängig von der Betrachtung der Gränzverhältnisse, der unendlich Kleinen, oder verschwindender Grössen sich beweisen lassen. Allein diese Methode kann nichts desto weniger die der Gränzverhältnisse entbehren, weil man bei der Anwendung z. B. bei Bestimmung des Volumens der krummen Oberflächen, bei Rectification der Curven, bei Aufsuchung der Ausdrücke für die Subtangente, Subnormale, . . . immer seine Zuflucht zu den Gränzverhältnissen, oder zum unendlich Kleinen nehmen muss.

251) Betrachtet man die Entwicklungen verschiedener Funktionen $(x + h)^m$, a^{x+h}, Log. $(x + h)$, Sin. $(x + h)$, . . . welche die Grössenlehre darbietet, so waltet bei der geringen Anzahl dieser Funktionen keine Schwierigkeit ob, einzusehen, dass in ihren Entwicklungen der Coëfficient der ersten Potenz von h weder Null, noch unendlich sein kann, wenigstens nicht, so lange x seinen unbestimmten Werth behält, was übrigens schon

aus dem vorigen Beweise erhellt. Wenn z. B. $p = o$ wäre, so fänden in der Gleichung

$$f(x+h) = fx + ph + qh^2 + \dots.$$

zwei Fälle Statt; entweder müsste der Werth von x in p durch eine identische Gleichung, oder durch eine Gleichung, welche es nicht wäre, gegeben sein. Im letztern Falle zeigt $p = o$ die Gleichung eines gewissen Grades an, welche nur eine beschränkte Anzahl von Werthen für x lieferte, was aber gegen die Voraussetzung wäre, die für x irgend einen Werth zulässt; wenn also $p = o$, d. i. $f'x = o$ eine identische Gleichung in x *) wäre, so hätte man, wenn $x = x + h$, auch noch $f'(x+h)$; und da sich überall, wo x steht, auch h fände; so wäre diese Gleichung für h immer noch Null, oder mit andern Worten, diese Gleichung fände für jeden Werth von h Statt, was also auch von ihrer Entwicklung gelten würde, welche, Art. 139,

$$p + p'h + p''h^2 + p'''h^3 + \dots = o$$

ist; ist aber eine Gleichung dieser Art, unabhängig von h, Null, so müssen auch die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von h einzeln genommen Null sein, man müsste daher haben:

$$p' = o,\ p'' = o,\ p''' = o, \dots$$

substituirt man diese Werthe in den Gleichungen

$$p' = 2q,\ p'' = 3r,\ p''' = 4s, \dots$$

welche man aus der Identität der Glieder mit den nämlichen Potenzen von ih, ih^2, ih^3, ... behaftet in (134) und (136) erhält, so wäre:

$$q = o,\ r = o,\ s = o, \dots$$

und da zugleich $p = o$; würde die Gleichung (133) auf

$$f(x+h) = fx$$

reducirt werden; $x + h$ an die Stelle von x gesetzt, dürfte also keine Veränderung in der Funktion erzeugen,

*) Der Fall, in welchem p kein x enthält, ist unter diesem begriffen; denn wird der Werth von p, welcher Null ist, durch $a - a$ vorgestellt, so lässt er sich auch wie $a - x - (a - x)$ betrachten.

(Anmerk. d. Verf.)

welches eben so viel hiesse, als diese Funktion wäre identisch oder constant; denn bekanntlich giebt die Substitution von $x + h$ für x in den Formeln $x^2 - x^2$ oder in $c + x^2 - x^2$ das nämliche Resultat, und man sieht ein, dass im ersten Falle die Funktion identisch, im zweiten auf ein constantes c gebracht wäre. Es folgt aus dem Vorhergehenden, dass der Coëfficient der ersten Potenz von h in der allgemeinen Entwicklung nicht Null sein kann.

Es wäre nicht weniger ungereimt, diesen Coëfficienten unendlich anzunehmen; denn der zweite Theil der Gleichung (133) wäre auch Null, d. i. man hätte $f(x + h) = \infty$, und da $f(x + h)$ zusammengesetzt ist aus aus $x + h$, wie fx aus x, so würde das Glied, welches den Ausdruck $f(x + h)$ unendlich machte, dasselbe in fx bewirken. Enthielte z. B. $f(x + h)$ ein Glied von folgender Form $\frac{A}{(x+h)-(x+h)}$, welches unendlich ist, so ist offenbar, dass man auch in fx das Glied $\frac{A}{x-x}$, welches unendlich ist, haben müsste; die Funktion wäre also unendlich, was jedoch nicht angenommen ist.

252) Die Ausdrücke $f'x$, $f''x$, $f'''x$, ... nennt *Lagrange* die Prime, die Seconde, die Terze, ... und allgemein heissen sie *abgeleitete Funktionen.*

Er bezeichnet auch die abgeleiteten Funktionen auf eine andere Art, indem er y' für $\frac{dy}{dx}$, y'' für $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... schreibt.

Von den Fällen, in welchen die Taylorsche Formel mangelhaft ist.

253) Ueberhaupt bleibt die Form der Funktion dieselbe, wenn darin $x + h$ für x gesetzt wird, weil $x + h$ sich überall findet, wo zuvor x stand. Wenn also fx

eine Wurzelgrösse enthält, so muss auch $f(x+h)$ eine solche enthalten. Wäre z. B.

$$fx = bx^2 + \frac{a}{\sqrt{x}},$$

so würde die nämliche Wurzelgrösse auch in dem Ausdrucke

$$f(x+h) = b(x+h) + \frac{a}{\sqrt{x+h}}$$

vorkommen.

254) Dieses findet jedoch nicht immer Statt, wenn x einen besondern (ich möchte sagen bestimmten) Werth hätte. Fände sich z. B. der Ausdruck $\sqrt[3]{x-a}$ in fx, so müsste auch $f(x+h)$ das Glied $\sqrt[3]{x+h-a}$ enthalten. Allein unter der Voraussetzung $x = a$ verschwindet $\sqrt[3]{x-a}$ in fx, während für dieselbe Hypothese das Glied $\sqrt[3]{x-a+h}$ in $f(x+h)$ in $\sqrt[3]{h} = h^{1/3}$ übergienge; die Reihe für $f(x+h)$ enthielte also eine Wurzelgrösse, die in fx nicht vorkäme, nnd mithin nicht entwickelt werden könnte nach ganzen Potenzen von h. Diese Unmöglichkeit würde sich durch die unendlichen Werthe der Differenzial-Coëfficienten offenbaren.

Hätte man z. B. die Gleichung

$$y = \sqrt[3]{x-a},$$

so erhielte man durch Differenziation:

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{3}(x-a)^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-a)^2}},$$

woraus erhellet, dass für $x = a$ dieses Differenzial unendlich wird.

255) Es sei allgemein

$$f(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots$$
$$+ Mh'' + Nh^{n+\frac{1}{z}} + \ldots\ldots \quad (142).$$

Diese Reihe würde man erhalten haben, wenn man $x = a$ machte, und worin $n + \frac{1}{z}$ eine Grösse bezeichnet, welche zwischen n und $n + 1$ fällt; es soll nun bewiesen werden, dass der Differenzial-Coëfficient der Ordnung $n + 1$ unendlich ist. Betrachtet man desshalb a als eine Veränderliche, so hat man, Art. 53 und 54,

$$\frac{df(a+h)}{da} = \frac{df(a+h)}{dh}; \quad \frac{d^2f(a+h)}{da^2} = \frac{d^2f(a+h)}{dh^2} \ldots (143).$$

Wird nach und nach hinsichtlich h die Gleichung (142) differenziirt, und durch M', N', M'', N'', ... bezeichnet, was die Coëfficienten M, N alsdann werden, so hat man:

$$\frac{df(a+h)}{dh} = B + 2Ch + 3Dh^2 + \ldots M'h^{n-1} + Nh^{n+\frac{1}{z}-1} + \ldots\ldots$$

$$\frac{d^2f(a+h)}{dh^2} = 2C + 2.3Dh + \ldots + M''h^{n-2} + N''h^{n+\frac{1}{z}-2} + \ldots\ldots$$

Werden für die Theile auf der Linken des Gleichheitszeichens ihre Werthe aus (143) geschrieben, so ist:

$$\frac{df(a+h)}{da} = B + 2Ch + 3Dh^2 + \ldots + M'h^{n-1} + N'h^{n+\frac{1}{z}-1} + \ldots \quad (144)$$

$$\frac{d^2f(a+h)}{da^2} = 2C + 2.3Dh + \ldots + M''h^{n-2} + Nh^{n+\frac{1}{z}-2} + \ldots \quad (145)$$

. .

. .

. .

. .

. .

Setzt man $h = o$, so hat man in den Gleichungen (143), (144), (145),

$$fa = A; \quad \frac{dfa}{da} = B; \quad \frac{d^2fa}{da^2} = 2C; \ldots$$

Diess ist hinreichend, die Coëfficienten A, B, C,... der Gleichung (142) zu erlangen.

Bei genauerer Betrachtung der Gleichungen (144) erkennt man, dass bei jeder Differenziation n um eine Einheit vermindert werde. Hat man nun die n^{te} Differenziation vorgenommen, so ist:

$$\frac{d^n f(a+h)}{da^n} = \ldots Ph^{n-n} + Qh^{n-n+\frac{1}{z}} + \ldots.$$

$$= P + Qh^{\frac{1}{z}} + \ldots$$

und bei der folgenden Differenziation:

$$\frac{d^{n+1} f(a+h)}{da^{n+1}} = Rh^{\frac{1}{z}-1} + \ldots$$

Da aber $\frac{1}{z}$ kleiner als die Einheit ist, so hat man auch für $\frac{1}{z} - 1$ eine negative Zahl; die vorige Gleichung kann daher auch also geschrieben werden:

$$\frac{d^{n+1} f(a+h)}{da^{n+1}} = \frac{R + \ldots}{h^{-(1-\frac{1}{z})}}.$$

Setzt man nun $h = o$, so findet man bei Bestimmung eines der Coëfficienten der Gleichung (142):

$$\frac{d^{n+1} f(a)}{da^{n+1}} = \frac{R}{o} = \infty.$$

Eben so verhält es sich, wenn man den Differenzial-Coëfficienten einer höhern Ordnung bestimmen will.

Aus diesem Lehrsatze geht hervor, dass man in der Entwicklung von $f(x+h)$, wenn *darin eine gebrochene Potenz von h vorkömmt, die zwischen die Glieder mit h^n und h^{n+1} behaftet fällt, die Glieder der Taylorschen Formel nur bis zur Ordnung n inclus. bestimmen kann, und dass alle folgenden Glieder unendlich werden.*

256) Ist eine Funktion von x, durch fx bezeichnet, gegeben, und man will f $(x + h)$ für $x = a$ in eine Reihe entwickeln, so muss man bekanntlich die Glieder der Reihe

$$fx + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

berechnen. Verrichtet man diesen Calcul, so findet man, dass einer der Differenzial-Coëfficienten für $x = a$ unendlich werde. In diesem Falle wird man nicht mehr f $(x + h)$ nach der Taylorschen Formel entwickeln, sondern folgendes Verfahren einschlagen: Man setze $x + h$ für x in fx, alsdann enthält das Glied, worin $x - a$ im Nenner vorkömmt, $x - a + h$, in welchem Falle dieses Glied für $x = a$ nicht mehr unendlich wird; allein man erhält ein Glied, welches mit einer gebrochenen Potenz von h behaftet ist.

257) Es sei z. B.

$$fx = 2ax - x^2 + a\sqrt{x^2 - a^2};$$

differenziirt man, so ist:

$$\frac{dy}{dx} = 2(a - x) + \frac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}};$$

substituirt man diese Werthe und jene von $\frac{d^2y}{da^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$ in der Taylorschen Formel, Art. 35, so erhält man:

$$f(x + h) = 2ax - x^2 + a\sqrt{x^2 - a^2}$$
$$+ \left[2(a - x) + \frac{ax^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right] h + \ldots$$

Setzt man $x = a$, so wird das Glied durch h vervielfacht unendlich, und diese Reihe ist dann nicht mehr möglich. In diesem Falle wird man nach der vorhergehenden Regel $x + h$ für x setzen in die gegebene Gleichung, und man findet:

$$f(x + h) = 2ax + 2ah - x^2 - 2xh - h^2$$
$$+ a\sqrt{x^2 + 2xh + h^2 - a^2},$$

welche für $x = a$ auf folgende reducirt wird:

$$f(a + h) = a^2 - h^2 + a\sqrt{h\,2ah + h^2};$$

oder

$$f(a + h) = a^2 - h^2 + a\sqrt{h(2a - h)}.$$

Wird dieses Binomium entwickelt, und der Kürze wegen die durch diese Formel gegebenen Coëfficienten durch A, B, C, . . . bezeichnet, so ist:

$$\sqrt{2a + h} = (2a + h)^{1/2} = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots;$$

substituirt man, so ergiebt sich:

$$f(a + h) = a^2 - h^2 + aA\sqrt{h} + aBh\sqrt{h} + aCh^2\sqrt{h} + \ldots$$

Man sieht aus diesem Beispiele, dass wenn man $x + h$ in der Funktion setzt, und $x = a$ macht, man eine oder mehrere gebrochene Potenzen von h einführen kann. Man entwickle hierauf alle Glieder einzeln, die einer Entwicklung fähig sind, entweder nach den Regeln des Binomiums, oder auf eine andere Art, und substituire diese Glieder in den Werth von $f(a + h)$, wovon auf diese Art die Entwicklung erhalten wird.

258) Lagrange hat bewiesen, dass im Falle x unbestimmt bleibt, die Reihe für $f(x + h)$ keine Glieder mit gebrochenen Potenzen von h behaftet, enthalten kann.

Nähme man wirklich an, es wäre

$$f(x + h) = fx + ph + qh^2 + \ldots + K\sqrt[3]{h};$$

so erhält man, da $K\sqrt[3]{h}$ dreier Werthe M, N, P, fähig ist, folgende drei Reihen:

$$f(x + h) = fx + ph + qh^2 + \ldots + M,$$
$$f(x + h) = fx + ph + qh^2 + \ldots + N,$$
$$f(x + h) = fx + ph + qh^2 + \ldots + P.$$

Da aber fx die nämlichen Wurzelgrössen wie $f(x + h)$, Art. 253, enthalten soll, so müsste auch fx drei verschiedene Werthe Q, R, S haben; substituirte man nach und nach diese Werthe für fx, so fände man:

$$f(x + h) = Q + ph + qh^2 + \ldots + M,$$
$$f(x + h) = Q + ph + qh^2 + \ldots + N,$$
$$f(x + h) = Q + ph + qh^2 + \ldots + P,$$
$$f(x + h) = R + ph + qh^2 + \ldots + M,$$
$$f(x + h) = R + ph + qh^2 + \ldots + N,$$

$$f(x+h) = R + ph + qh^2 + \ldots + P,$$
$$f(x+h) = S + ph + qh^2 + \ldots + M,$$
$$f(x+h) = S + ph + qh^2 + \ldots + N,$$
$$f(x+h) = S + ph + qh^2 + \ldots + P,$$

so dass also der entwickelte Ausdruck $f(x+h)$ neun verschiedene Werthe hätte, während er unentwickelt nur so viel haben könnte, als fx, mithin drei in der wirklichen Hypothese; man kann also nicht annehmen, dass die Entwicklung von $f(x+h)$ eine gebrochene Potenz von h enthalte, ohne einem Widerspruch zu begegnen.

259) Eben so ist es leicht zu beweisen, dass $f(x+h)$ entwickelt kein Glied mit einer negativen Potenz von h enthalten kann; denn erthilete er ein solches Glied Mh^{-n}, so wäre:

$$f(x+h) = fx + ph + qh^2 + \ldots + \frac{M}{h^n};$$

wird $h = o$ gesetzt, so verwandelt sich der erste Theil in fx, der zweite hingegen wird unendlich wegen des darin enthaltenen $\frac{M}{h^n}$.

260) Ein Gleiches fände Statt, wenn die Entwicklung ein Glied mit dem Logarithmen von h behaftet enthielte. Z. B. ein Glied wie A Log. h würde für $h = o$ auch A Log. o, nun aber ist der Logarithme von o unendlich negativ, folglich wäre es auch A Log. h; woraus folgen würde, dass fx auch unendlich negativ wäre, was gegen die Annahme streitet. *)

*) Man lese hierüber Journal de l'École polytech. cahier XIV pag. 135. (Anmerk. d. Uebers.)

Ende der Differenzialrechnung.

Anfangsgründe
der
Differenzial- und Integralrechnung.

Integralrechnung.

261) Der Gegenstand der Integralrechnung ist die Wiederauffindung der Funktion, woraus durch Differenziation ein gegebenes Differenzial erzeugt wurde. Um mit dem einfachsten Falle den Anfang zu machen, wollen wir den Ausdruck $x^m dx$ zu integriren suchen. Differenziiren wir in dieser Absicht den Ausdruck x^{m+1}, so erhalten wir:

$$\text{D. } x^{m+1} = (m+1)\, x^m dx;$$

und hieraus

$$\frac{\text{D. } x^{m+1}}{m+1} = x^m dx;$$

da nun die Constante $m + 1$ auf die Differenziation keinen Einfluss hat; so können wir auch die vorige Gleichung auf folgende Art schreiben:

$$\text{D. } \frac{x^{m+1}}{m+1} = x^m dx;$$

folglich ist $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ die Grösse, deren Differenzial $x^m dx$ ist. Um dieses Geschäft anzuzeigen, wollen wir dem Diffe-

renzial das Zeichen $\int$, welches *Summe* oder *Integral* *) bedeutet, vorsetzen, so dass wir also schreiben werden:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

262) Hieraus können wir folgende Regel ableiten, *Um das Integral von $x^m dx$ zu erhalten, muss man den Exponenten um eine Einheit erhöhen, durch diesen so erhöhten Exponenten, und durch das Differenzial dividiren.*

263) Wäre z. B. $\frac{adx}{x^3}$ gegeben, so fände man:

$$\int \frac{adx}{x^3} = \int ax^{-3} dx = \frac{ax^{-3+1}}{-3+1}$$

$$= \frac{ax^{-2}}{-2} = -\frac{a}{2x^2}.$$

Auf dieselbe Art erhalten wir:

$$\int dx \sqrt[3]{x^2} = \int x^{2/3} dx = \frac{x^{2/3+1}}{\frac{2}{3}+1}$$

$$= \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} = \frac{3x^{5/3}}{5}.$$

264) Bemerkt man, dass $mx^{m-1}dx$ durch Differenziation von $a + x^m$ entsteht, dasselbe Differenzial nämlich, wie von x^m; so muss man nothwendig beim Integ-

*) Das Wort Summe wurde von den alten Geometern, um das Integral zu bezeichnen, eingeführt, weil sie, vermöge der Methode des unendlich Kleinen eine Funktion y als die Summe unendlich kleiner Zunahmen betrachteten. — Man sieht z. B., dass wenn MP, Fig. 48, die Ordinate ist, man habe

$$MP = ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + a^{IV}M,$$

d. h. dass y gleich sei der Summe der durch dy bezeichneten unendlich kleinen Zunahmen.

(Der Verf.)

riren dem Integral eine Constante zusetzen. Die vorigen Beispiele lassen sich daher auch so schreiben:

$$\int \frac{adx}{x^3} = - \frac{a}{2x^2} + C; \int dx \sqrt[3]{x^2} = \frac{3x^{5/3}}{5} + C.$$

265) Diese Constante C, welche bei der Differenziation verschwinden soll, ist im allgemeinen willkührlich, in so fern sie nicht durch die Natur der Aufgabe bestimmt ist.

Hätte man z. B. die Gleichung $y = ax^2 - b$, die der Parabel CBD, Fig. 49, deren Anfangspunkt in A ist, entspricht; so fände man aus $dy = 2axdx$ durch Integration:

$$y = ax^2 + C - \ldots\ldots (1).$$

Diese Gleichung kann unendlich vielen Parabeln angehören. Verlangt man nun, dass aus allen diesen Parabeln CBD, C′B′D′, C″B″D″, ... die Curve, die zur Gleichung $y = ax^2 + C$ hat, eine Parabel sei, welche durch den Punkt E gehe, dessen Coordinaten

$$y = o, \; x = AE = + \sqrt{\frac{b}{a}}$$

sind; so muss $y = o$ sein, wenn man $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ setzt: hiedurch wird die Gleichung (1) auf folgende reducirt:

$$o = b + C;$$

woraus sich ergiebt $C = - b$. Wird dieser Werth in die Gleichung (1) eingeführt, so erhält man:

$$y = ax^2 - b,$$

dieselbe Gleichung, welche man vor der Differenziation hatte.

266) Ist hingegen die Constante nicht durch die Natur der Aufgabe bestimmt, so kann man hinsichtlich der Constanten verfahren, wie im folgenden Beispiele

gezeigt wird. Gesetzt, es wäre $x^m dx$ gegeben, und man hätte das Integral

$$y = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \ldots\ldots\ldots (2)$$

gefunden, so gebe man dem x einen Werth b; hiedurch wird der zweite Theil dieser Gleichungen

$$\frac{b^{m+1}}{m+1} + C \ldots\ldots\ldots\ldots (3);$$

da C von der Willkühr abhängt, so kann man ihm einen solchen Werth beilegen, dass der Ausdruck (3) Null, oder, was dasselbe ist, dass $y = o$ werde, wenn $x = b$. Die Gleichung (2) geht alsdann in folgende über:

$$o = \frac{b^{m+1}}{m+1} + C;$$

wird hieraus der Werth für C entwickelt, und in (2) eingeführt, so erhält man:

$$y = \frac{x^{m+1} - b^{m+1}}{m+1} \ldots\ldots\ldots (4).$$

267) Nur auf einen einzigen Fall lässt sich die Regel (262) zur Integration von $x^m dx$ nicht anwenden, wenn nämlich $m = -1$; denn alsdann wird die Formel (4)

$$y = \frac{x^0 - b^0}{0} = \frac{0}{0},$$

in welchem Falle man von der Regel (81) Gebrauch machen müsste, um den wahren Werth des Integrals zu bestimmen. Um dieser Ungemächlichkeit auszuweichen, bemerke man, dass $x^{-1}dx = \frac{dx}{x}$, und dass dieser Ausdruck das Differenzial von Log. x ist; mithin hat man:

$$\int \frac{dx}{x} = \text{Log. } x + C.$$

Von den zusammengesetzten Differenzialen, deren Integration nach der Regel des Artikels (262) *verrichtet werden kann.*

268) Wir haben gesehen, Art. 28, dass das Differenzial eines Polynomiums der Summe der Differenziale seiner Theile gleich sei; umgekehrt wird also das Integral eines Polynomiums der Summe der Integrale der Glieder, woraus es besteht, gleich sein.

So ist z. B.

$$\int\left(adx - \frac{bdx}{x^3} + xdx\sqrt{x}\right) = \int adx - \int\frac{bdx}{x^3} + \int x^{3/2}dx + C;$$

oder wenn man die angezeigten Operationen wirklich verrichtet,

$$\int\left(adx - \frac{bdx}{x^3} + xdx\sqrt{x}\right) = ax - \frac{b}{x^2} + \tfrac{2}{5}x^{5/2} + C.$$

Wir haben hier nur eine einzige Constante beigefügt; denn da jedes Glied bei der Integration von einer Constante begleitet ist, können wir wohl auch die Summe aller dieser Constanten durch einen einzigen Buchstaben bezeichnen.

269) Jedes Polynomium, wie $(a + bx + cx^2 + \ldots)^n dx$, lässt sich nach derselben Regel integriren, wenn n eine ganze positive Zahl ist. In diesem Falle darf man nur das Polynonium zur angezeigten Potenz erheben, und jedes Glied besonders integriren.

Um z. B. $(a + bx)^2dx$ zu integriren, hat man

$$\int (a + bx)^2dx = \int (a^2dx + 2abxdx + b^2x^2dx)$$

$$= a^2x + abx^2 + \frac{b^2x^3}{3} + C.$$

270) Hat man einen Ausdruck wie $(Fx)^n dFx$, der aus zwei Faktoren zusammengesetzt ist, wovon der eine das Differenzial desjenigen Theils ist, der zwischen den Klammern sich befindet, so setze man, um diesen Ausdruck zu integriren, $Fx = z$, mithin $dFx = dz$; wird substituirt, so erhält man

$$(Fx)^n dFx = z^n dz;$$

wird integrirt,

$$\int (Fx)^n dFx = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(Fx)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Um hievon ein Beispiel zu geben, sei

$$(a + bx + cx^2)^{2/3} (bdx + 2cxdx).$$

Da $bdx + 2cxdx$ das Differenzial der Grösse zwischen den Klammern ist, mache man

$$a + bx + cx^2 = z$$

und man erhält durch Differenziation

$$bdx + 2cxdx = dz;$$

mithin

$$(a + bx + cx^2)^{2/3} (bdx + 2cxdx) = z^{2/3} dz,$$

und das Integral dieses Ausdrucks wird

$$\frac{3}{5} z^{5/3} = \frac{3}{5} (a + bx + cx^2)^{5/3} + C.$$

271) Wäre einer der Faktoren, welcher das Differenzial des andern ist, noch mit einer Constante behaftet; so könnte man ebenfalls auf dieselbe Weise integriren. Es sei z. B.

$$(a + bx^2)^{1/2} mxdx \; \ldots\ldots\ldots \; (5).$$

Ich finde, dass das Differenzial $2bxdx$ von $a + bx^2$ nur durch die Constante von $mxdx$ verschieden ist. Ich setze desswegen $a + bx^2 = z$, folglich $2bxdx = dz$, woraus ich $xdx = \frac{dz}{2b}$ ableite; substituire ich diese Werthe in den Ausdruck (5), so erhalte ich:

$$(a + bx^2)^{1/2} mxdx = \frac{m}{2b} z^{1/2} dz;$$

wird nun integrirt, so ergiebt sich:

$$\int (a + bx^2)^{1/2} mxdx = \frac{m}{3b} z^{3/2} + C = \frac{m}{3b} (a + bx^2)^{3/2} + C.$$

272) Die nämliche Umformung lässt sich anwenden, um gewisse Differenziale auf Logarithmen zu bringen.

So z. B. wenn $\frac{adx}{a + bx}$ gegeben wäre; so setzte ich $a + bx = z$, und leitete daraus $dx = \frac{dz}{b}$ ab; durch Substitution fände ich dann

$$\int \frac{adx}{a + bx} = \int \frac{adz}{bz} = \frac{a}{b} \int \frac{dz}{z} = \frac{a}{b} \text{ Log. } z + C$$

und wenn für z sein Werth wieder genommen wird,

$$\int \frac{adx}{a + bx} = \frac{a}{b} \text{ Log. } (a + bx) + C.$$

Verfährt man eben so mit $\frac{adx}{a - bx}$, so erhält man zum Integral dieses Ausdrucks:

$$\int \frac{adx}{a - bx} = - \frac{a}{b} \text{ Log. } (a - bx) + C.$$

Von den Differenzialen, deren Integrale Kreisbögen sind.

273) Es sei $x = CE$, Fig. 50, der Sinus, dessen Bogen $CB = z$ ist; mithin $x = \text{Sin. } z$; wird differenziirt; so ist $dx = \text{Cos. } zdz$, woraus $dz = \frac{dx}{\text{Cos. } z}$ abgeleitet wird. Man hat aber auch

$$\text{Cos.}^2 z + \text{Sin.}^2 z = 1,$$

mithin

$$\text{Cos. } z = \sqrt{1 - \text{Sin.}^2 z} = \sqrt{1 - x^2};$$

wird dieser Werth in den von dz eingeführt, so erhält man:

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

folglich, wenn man integrirt,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = z + C \quad \ldots\ldots (6).$$

Zur Bestimmung des Werthes der Constante nehme man an, dass

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = o,$$

wenn $x = o$ ist. Da nach, Fig. 50, der Bogen z, welcher durch CB bezeichnet wird, zu gleicher Zeit mit dem Sinus Null ist, mithin die Gleichung (6) auf $o = C$ bei dieser Voraussetzung reducirt wird; so ist:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Bog. } (\text{Sin.} = x).$$

274) Von dem vorigen Integral lässt sich leicht das von

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

ableiten. Denn dividirt man den Zähler und Nenner des Bruchs, durch a, so erhält man:

$$\int \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \int \frac{\text{D.} \frac{x}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

Dieses Integral ist aus $\frac{x}{a}$ so zusammengesetzt, wie $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ aus x; hieraus geht hervor, dass

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{Bog. } \left(\text{Sin.} = \frac{x}{a}\right).$$

275) Es sei ferner z der Bogen CD, Fig. 50, dessen Cosinus $AG = x$; folglich

$$x = \text{Cos. } z,$$

und wenn man differerziirt:

$$dx = -\, dz \text{ Sin. } z;$$

hieraus

$$dz = -\frac{dx}{\text{Sin. } z};$$

wird hierin der Werth von Sin. z aus der Gleichung

$$\text{Cos.}^2 z + \text{Sin.}^2 z = 1$$

gesetzt, so ergiebt sich:

$$dz = -\frac{dx}{\sqrt{1 - \text{Cos.}^2 z}};$$

und weil Cos. z = x; so ist auch

$$dz = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

wird integrirt

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Bog. (Cos.} = x) + C,$$

oder

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Bog. DC} + C \ldots . (7).$$

Um die Constante C zu bestimmen, nehme man an, dass $\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ in Null übergehe, wenn x = o wird; alsdann wird die Gleichung (7) auf

$$o = \text{Bog. (Cos.} = o) + C \ldots . (8)$$

reducirt. Damit aber der Cosinus AG des Bogens DC Null sei, muss dieser Bogen

$$DB = \tfrac{1}{4}\ \text{Periph.} = \tfrac{1}{2}\pi$$

werden; setzt man nun $\frac{1}{2}\pi$ für Bog. (Cos. = o) in die Gleichung (8), so hat man:

$$o = \tfrac{1}{2}\pi + C;$$

hieraus erhält man:

$$C = -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Wird dieser Werth in (7) substituirt, so ist

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -(\tfrac{1}{2}\pi - \text{Bog. DC}) = -\text{Bog.CB}.$$

276) Nach Art. 45 ist

$$\text{D. Tang. } x = \frac{dx}{\text{Cos.}^2 x};$$

wird nun x = Tang. z gesetzt, so erhalten wir:

$$dx = \frac{dz}{\text{Cos.}^2 z};$$

und hieraus

$$dz = dx \times Cos.^2 z.$$

Nun aber ist aus der Proportion

$$Cos.z : 1 = 1 : Sec.z,$$

$$Cos.z = \frac{1}{Sec. z},$$

mithin

$$Cos.^2 z = \frac{1}{Sec.^2 z} = \frac{1}{1 + Tang.^2 z} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Wird dieser Werth substituirt, so erhalten wir

$$dz = dx \frac{1}{1 + x^2},$$

und durchs Integriren

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = z + C.$$

Nimmt man das Integral in der Voraussetzung, dass es verschwinde, wenn $x = o$, so wird auch z Null, und man hat:

$$o = C;$$

daher

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \textit{Bogen, dessen Tangente } x \textit{ ist.}$$

277) Auf diese Formel lässt sich

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$$

zurückführen. Denn dividirt man die Glieder des Bruchs durch a^2, so lässt er sich auf folgende Art schreiben:

$$\int \frac{\frac{dx}{a^2}}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{\frac{dx}{a}}{1 + \frac{x^2}{a^2}};$$

und da dieses Integral aus $\frac{x}{a}$ besteht, wie

$\frac{1}{a} \int \frac{dx}{1 + x^2}$ aus x, so hat man:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \text{Bog. } \left(\text{Tang.} = \frac{x}{a}\right).$$

Letztlich sei noch x der *Sinus versus* DG. Da Cosinus und Sinus versus zusammen der Einheit gleich sind, so hat man $x + \text{Cos.}z = 1$; wird differenzürt,

$$dx = dz \text{ Sin.}z;$$

hieraus

$$dz = \frac{dx}{\text{Sin.}z};$$

nun aber ist

$$\text{Sin.}z = \sqrt{1 - \text{Cos.}^2 z} = \sqrt{(1 - \text{Cos.}z)(1 + \text{Cos.}z)}$$
$$= \sqrt{x(2 - x)} = \sqrt{2x - x^2};$$

folglich, wenn substituirt wird,

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}},$$

und dann durch Integration:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \text{Bog. (Sin. vers.} = x.)$$

Wir fügen hier keine Constante bei, weil z Null wird, wenn man annimmt, dass das Integral unter der Voraussetzung $x = 0$ verschwindet.

278) Will man den Werth des Integrals für einen bestimmten Werth von x haben, so verfahre man nach folgendem Beispiele.

Man verlangt das Integral von $\frac{dx}{1 + x^2}$, wenn $x = 7$. Ist der Radius $= 1$, so wird die Tangente 7 sein; und da die Sinustafeln für den Radius, der in zehn tausend Millionen Theile getheilt ist, eingerichtet sind, so muss die Tangente für diesen Radius zehn tausend Millionen mal grösser sein, d. i. sie wird gleich sein $7 \times 10{,}000000000$. Der Ausdruck des Logarithmen der Tangente in den Tafeln ist daher

$$\text{Log. } 10{,}000000000 + \text{Log. } 7 = 10 + \text{Log. } 7$$
$$= 10 + 0{,}845098 = 10{,}845098.$$

Sucht man diesen Logarithmen in den Sinustafeln, so findet man, dass er dem Bogen gleiche von

$90^{o}96'$ *nach der Decimaleintheilung*

oder von

$81^{o}52'$ *der Sexagesimaleintheilung.*

Um nun den Werth des Bogens in Zahlen zu finden, wenn der Radius = 1, muss man bemerken, dass unter dieser Voraussetzung der Kreisumfang = 6,283; man hat daher

$400^{o} : 99^{o}96' = 6{,}283$: *zum gesuchten Bogen* = 1,42,

oder

$360^{o} : 81^{o}52' = 6{,}283$: *zum gesuchten Bogen* = 1,42.

Von der Integration,
die theilweise verrichtet wird.

279) Nimmt man nach dem in Art. 14 angezeigten Verfahren das Differenzial eines Produkts zweier Veränderlichen, so findet man:

$$\text{D.}\ uv = udv + vdu;$$

wird integrirt, und $\int vdu$ auf die andere Seite gebracht, so ergiebt sich:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Nach dieser Formel werden nun Differenziale behandelt, welche man theilweise integriren will *).

280) Wüsste man z. B. nicht, welches das Integral von $x^{m}dx$ sei, so setze man $x^{m} = u$, $dx = dv$, und man hätte:

$$\int x^{m}dx = x^{m+1} - \int x . mx^{m-1}dx = x^{m+1} - m\int x^{m}dx;$$

*) Diese Formel ist von vielfältigem Gebrauche; denn manchmal ist's leichter, das Integral $\int udv$, als $\int vdu$ zu finden; oder die Form von $\int udv$ ist von einfacherer Form, als $\int vdu$, da es dann weit vortheilhafter ist, die Integration von vdu auf die von udv zu reduciren. *Vergl. Vollst. Lehrbegriff der höhern Analysis von Tobias Mayer tom. II pag.* 60 *Anmerkung.* (Anmerk. d. Uebers.)

bringt man die Glieder, welche mit $x^m dx$ behaftet sind, auf eine Seite des Gleichheitszeichens, so ist

$$(m + 1) \int x^m dx = x^{m+1};$$

mithin

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

281) Es sei ferner

$$\int dx \text{ Log. } x$$

zu suchen; ich setze hier

$$\text{Log. } x = u; \ dx = dv,$$

und ich erhalte

$$\int dx \text{ Log. } x = x \text{ Log. } x - \int dx = x \text{ Log. } x - x + C$$
$$= (\text{Log. } x - 1)\, x + C.$$

282) Letztlich suche man das Integral von

$$dx \sqrt{a^2 - x^2};$$

wird $\sqrt{a^2 - x^2} = u$, und $dx = dv$ gesetzt, so findet man:

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad 9).$$

Nun suche man für $\int dx \sqrt{a^2 - x^2}$ einen andern Werth. Zu diesem Behufe multiplicire man letztern Ausdruck durch

$$\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

hiedurch gelangt man zur identischen Gleichung

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

verrichtet man wirklich die erste von den im zweiten Theile der Gleichung angezeigten Integrationen; so ergiebt sich:

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = a^2 \text{ Bog. } \left(\text{Sin.} = \frac{x}{a}\right) - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

wird diese Gleichung zu (9) addirt, so entsteht

$$2\int dx\sqrt{a^2-x^2}=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\,\text{Bog.}\left(\text{Sin.}=\frac{x}{a}\right);$$

daher

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2}=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\,\text{Bog.}\left(\text{Sin.}=\frac{x}{a}\right)+C.$$

Man sieht aus diesen Beispielen, dass im Allgemeinen die Integration durch Theile eines Ausdrucks, wie $\int v dx$ dieses Integral von jenem $\int u dv$ abhänge, und also diese Integrations-Methode nicht immer anwendbar ist. (Man sehe die Anmerk. zu 279).

Von der Integration durch Reihen.

283) Es sei Xdx ein Differenzial, worin X eine Funktion von x bezeichnet. Wird X in eine Reihe entwickelt

$$Ax^\alpha+Bx^\beta+Cx^\gamma+Dx^\delta+Ex^\varepsilon+\ldots,$$

welche nach den Exponenten α, β, γ, ... geordnet ist, so erhält man:

$$\int Xdx=\int(Ax^\alpha+Bx^\beta+Cx^\gamma+Dx^\delta+Ex^\varepsilon+\ldots)dx$$

$$=\frac{Ax^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{Bx^{\beta+1}}{\beta+1}+\frac{Cx^{\gamma+1}}{\gamma+1}+\frac{Dx^{\delta+1}}{\delta+1}+\frac{Ex^{\varepsilon+1}}{\varepsilon+1}+\ldots+C.$$

(Wäre einer von den Exponenten α, β, γ, ... -1, so würde man jenes Glied der Reihe, worin ein solcher Exponent vorkäme, wie das Differenzial eines Logarithmen integriren).

284) Betrachten wir als Beispiel $\frac{dx}{a+x}$, welches das Differenzial von Log. $(a+x)$ ist. Schreibt man $\frac{1}{a+x}dx$, so braucht man nur mit Hilfe der Division $\frac{1}{a+x}$ in eine Reihe entwickeln. Die verlangte Reihe aber lässt sich,

ohne diese Arbeit zu unternehmen, vermittelst einer leicht im Gedächtnisse zu behaltenden Formel herleiten; nämlich:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots \;(10).$$

Man kann auch wirklich den Bruch $\frac{1}{a+x}$ auf folgende Weise schreiben:

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{\left(1+\frac{x}{a}\right)};$$

um nun $\frac{1}{1+\frac{x}{a}}$ entwickeln zu können, braucht man nur z in $-\frac{x}{a}$ in der Formel (10) zu verändern; hiedurch erhält man:

$$\frac{1}{1+\frac{x}{a}} = 1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \ldots;$$

daher

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{1+\frac{x}{a}} \text{ oder } \frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \ldots$$

folglich

$$\int \frac{dx}{a+x} = \int \left[\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \ldots\right] dx;$$

integrirt man nun jedes Glied der eingeschlossenen Reihe besonders, so ergiebt sich:

$$\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \ldots + C \ldots (11);$$

bemerkt man hiebei noch, dass der erste Theil dieser Gleichung ein logarithmisches Differenzial ist, Art. 272; so hat man;

$$\text{Log.}\,(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \ldots + C \ldots (12).$$

Zur Bestimmung der Constante hat man zu bemerken, dass, sobald $x = o$ gesetzt wird, die vorige Gleichung auf Log. $a = o + C$ reducirt werde; wird nun dieser Werth von C substituirt, so geht die Gleichung (12) in folgende über:

$$\text{Log.}\,(a + x) = \text{Log.}\,a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \ldots ^{*)}.$$

285) Wir wollen nun als zweites Beispiel den Ausdruck $\frac{dx}{1 + x^2}$ durch Reihen integriren. Wird das Differenzial so geschrieben ... $\frac{1}{1 + x^2} \times dx$, so hat man zuförderst die Entwicklung von $\frac{1}{1 + x^2}$ zu suchen.

*) Es ist zu bemerken, dass wenn die Constante auf diese Art bestimmt wird, sie nicht mehr als eine willkührliche Grösse betrachtet werden kann. Denn sobald in der Gleichung (12) $x = o$ gesetzt wird, so muss nothwendigerweise die Constante dem Logarithmen von a gleich sein. Dieser bestimmte Werth der Constante ist auch der Grund, warum wir Log. $(a + x)$ anstatt $\int \frac{dx}{a + x}$ geschrieben haben. Wir sehen auch aus der Gleichung (11), dass im Allgemeinen $\frac{dx}{a + x}$ das Differenzial von $C + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \ldots$ ist; da nun die Reihe Log. $a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3x^3} - \ldots$, die Entwicklung von Log. $(a + x)$, ein besonderer Fall der vorhergehenden Reihe ist, derjenige Fall nämlich, wo $C =$ Log. a; so will diess, wenn man Log. $(a + x)$ Statt $\int \frac{dx}{a + x}$ schreibt, eben so viel heissen, als hätte man unter allen den Reihen, welche das Integral von $\frac{dx}{a + x}$ sind, jene ausgewählt, in welcher die Constante dem Log. a gleich ist.

Diese Bemerkung lässt sich auf die andern Ausdrücke ausdehnen, welche wir durch Reihen integriren wollen.

(Anmerk. d. Verf.)

Vergleicht man diesen Ausdruck mit $\frac{1}{1-z}$; so hat man $z = -x^2$; wird nun dieser Werth in die Gleichung (10) eingeführt, so ist:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots (13),$$

also

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + C$$

oder vielmehr, Art. 276,

$$\text{Bog.}(\text{Tang.} = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + C. (14).$$

Wenn $x = o$ ist, so wird auch der Bogen Null, und also auch $C = o$.

286) Ist die Tangente grösser als die Einheit, so wachsen die Glieder dieser Reihe ohne Ende, und es lässt sich für den Bogen kein Näherungswerth mehr bestimmen. In diesem Falle wird man eine abnehmende Reihe erhalten, wenn $x = \frac{1}{x}$ in der Gleichung (13) gesetzt wird, hierdurch ändert sie sich in folgende:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \ldots\ldots;$$

werden die Glieder des Bruchs auf der Linken des Gleichheitszeichens durch x^2 vervielfacht, so erhält man:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \ldots\ldots;$$

wird nun durch x^2 dividirt, so geht hervor:

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \ldots.$$

(Durch Division der Einheit dnrch $x^2 + 1$ wäre man direct zu diesem Resultate gelangt) folglich

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \ldots \right) dx + C:$$

und wird die angezeigte Integration verrichtet,

$$\text{Bog. (Tang.} = x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \ldots + C \ldots (15).$$

Um den Werth der Constante zu finden, setze man $x = o$, in welchem Falle aber die Glieder des zweiten Theiles der Gleichnng (15) unendlich würden; setzt man hingegen $x = \infty$, so wird der Ausdruck Bog. (Tang. $= x$) dem Quadranten gleich, und die Gleichung (15) wird $\frac{1}{4}$ Umfang des Kreises $= o + C$; bezeichnet man durch $\frac{1}{2}\pi$ den Quadranten, so giebt uns die Gleichung (15)

$$\text{Bog. (Tang.} = x) = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \ldots$$

287) Um

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

durch eine Reihe zu integriren, muss man $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Regeln des binomischen Lehrsatzes auf folgende Art entwickeln. Man berechne erst die Coëfficienten der Entwicklung von $(1 - x^2)^m$ wo $m = -\frac{1}{2}$; nun schreibe man, um diese Coëfficienten bilden zu können,

$$m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}, \ldots\ldots$$

verwandle dann m in $-\frac{1}{2}$, wodurch diese Ausdrücke in folgende übergehen:

$$-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{4}, -\tfrac{5}{6}, -\tfrac{7}{8}, \ldots\ldots$$

Wird $-\frac{1}{2}$ nach und nach durch $-\frac{3}{4}$, durch $-\frac{5}{6}$, ... vervielfacht, so ergeben sich die Coëfficienten, die man alsdann statt A, B, C, . . . in folgende Gleichung setzen muss:

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - Ax^2 + Bx^4 - Cx^6 + \ldots;$$

hierdurch erhält man:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{5}{6}x^6 + \ldots$$

und durch Integration der Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}x^6 + \ldots)dx$$

erhält man:

$$\text{Bog.}(\text{Sin.} = x) = x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7} + \ldots (16).$$

Wir haben desswegen hier keine Constante beigefügt, weil für $x = o$, der Bogen, dessen Sinus x ist, verschwindet.

288) Es giebt Fälle, wo man bei der Bestimmung des Werthes der Constante weder $x = o$, noch $x = \infty$ setzen kann. Es sei z. B.

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = (x^2-1)^{-1/2}\,dx = (x^2)^{-1/2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1/2}dx$$

$$= \frac{dx}{x}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1/2};$$

setzt man:

$$m,\ \frac{m-1}{2},\ \frac{m-2}{3},\ \ldots\ldots$$

und $m = -\tfrac{1}{2}$, so findet sich:

$$-\tfrac{1}{2};\ -\tfrac{3}{4};\ -\tfrac{5}{6};\ \ldots\ldots$$

woraus man, nach Art. 287, schliesst, dass

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{dx}{x}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^4}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x^6} + \ldots\right);$$

wird integrirt, so ist

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{Log.}\,x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4x^4}$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6x^6} - \ldots\ldots;$$

auf der andern Seite ist auch

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \times \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \int \frac{\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} + dx}{x+\sqrt{x^2-1}} = \text{Log.}\,(x+\sqrt{x^2-1});$$

daher

$$\text{Log.}\,(x+\sqrt{x^2-1}) = \text{Log.}\,x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4x^4} - \ldots\ldots \quad (17).$$

Zur Bestimmung der Constante kann man weder $x = \infty$, weil alsdann Log. x unendlich würde; noch $x = 0$ setzen, denn alsdann würden die Glieder Log. x, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2}, \ldots$ unendlich; nimmt man aber $x = 1$ an, so wird die Gleichung (17)

$$0 = 0 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\ldots + C = 0,$$

woraus folgt, dass

$$C = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{6} + \ldots$$

289) Vermittelst der Formel (16) kann man einen Näherungswerth des Kreisumfangs finden; denn man setze $x = \frac{1}{2}$, so reducirt sie sich auf

$$\text{Bog.}\,(\text{Sin.} = \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7} + \ldots\ldots\ldots;$$

Da aber der Sinus, dessen Ausdruck $= \frac{1}{2}$ gleich ist der halben Seite des regulären Sechsecks, und dieser Sinus dem zwölften Theile der Peripherie entspricht; so hat man:

$$\frac{\text{Periph.}}{12} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7} + \ldots$$

folglich

$$\text{Periph.} = 12\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7} + \ldots\right);$$

nimmt man die zehn ersten Glieder, der Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}$ $+ \ldots$ so findet man:

$$0{,}52359877;$$

daher

$$\tfrac{1}{2}\text{ Periph.} = 6\,(0{,}52359877) = 3{,}14159262,$$

in welchem Werthe der Fehler nur auf der letzten Decimalstelle beruhet.

290) Wir haben oben, Art. 284, $\text{Log.}\,(a+x) = \text{Log.}\,a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \ldots$ gefunden. Da diese Reihe wenig convergirt, setze man $x = -x$, und man wird

$$\text{Log.}\,(a-x) = \text{Log.}\,a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \ldots;$$

erhalten; wird diese Gleichung von der vorigen abgezogen, so bleibt

$$\text{Log.}\,(a+x) - \text{Log.}\,(a-x) = 2\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \ldots\right),$$

oder

$$\text{Log.}\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = 2\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \ldots\right) \ldots (18).$$

291) Will man nun nach dieser Formel z. B. den Logarithmen von 2 bestimmen, so nehme man $\frac{a+x}{a-x} = \frac{2}{1}$ an, mithin

$$a + x = 2, \text{ und } a - x = 1;$$

also

$$a = \frac{3}{2}, x = \frac{1}{2}, \frac{x}{a} = \frac{1}{3}, \frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{9}, \ldots;$$

durch Substitution erhält man:

$$\text{Log.}\,2 = 2\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{243} + \ldots\right)$$

Beschränkt man sich auf die zehn ersten Glieder dieser Reihe, und kehrt jedes in einen Decimalbruch um, so kann man den Werth des Logarithmen von 2

bestimmen Nimmt man das Dreifache dieses Logarithmen, so erhält man jenen von 2^3 oder von 8. Berechnet man aber auf der andern Seite mit Hilfe der Formel (18) den Logarithmen von $\frac{10}{8}$, und addirt ihn zum Logarithmen von 8; so gelangt man zu dem Logarithmen von $\frac{10}{8} \times 8 = \text{Log. } 10$. Man sieht hieraus, dass durch ähnliches Verfahren die Formel (18) jeden andern Logarithmen liefern würde; man muss übrigens bemerken, dass hier von Neperschen (natürlichen) Logarithmen die Rede ist. Um daraus die Logarithmen der Tafeln (gewöhnlichen) herzuleiten, so ist, wenn wir durch La den gewöhnlichen Logarithmen einer Zahl a bezeichnen, $a = 10^{La}$. Nehmen wir nun die natürlichen Logarithmen, so liefert uns diese Gleichung

$$\text{Log. } a = \text{Log. } 10^{La} = La \text{ Log. } 10;$$

folglich

$$La = \frac{\text{Log. } a}{\text{Log. } 10};$$

d. h. der gemeine Logarithme einer Zahl ist gleich dem natürlichen Logarithmen dieser Zahl, dividirt durch den natürlichen Logarithmen der Zahl 10.

292) Zur Bestimmung eines Logarithmen hat man noch eine andere Reihe aufgefunden, die noch mehr convergirt, als die Formel (18). Wir wollen nun sehen, wie sie sich aus dieser Formel herleiten lässt.

Dividirt man a + x durch a — x, so findet man:

$$\frac{a + x}{a - x} = 1 + \frac{2x}{a - x};$$

wird der Bruch $\frac{2x}{a - x}$ durch $\frac{v}{z}$ bezeichnet, so ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{a + x}{a - x} = 1 + \frac{v}{z} = \frac{z + v}{z};$$

multiplicirt man durch a — x, so erhält man:

$$a + x = a - x + \frac{av}{z} - \frac{vx}{z};$$

bringt man alle x auf die linke Seite des Gleichheitszeichens, so ist:

$$2x + \frac{vx}{z} = \frac{av}{z}$$

und hieraus, wenn durch z vervielfacht wird,

$$2zx + vx = av;$$

folglich

$$\frac{x}{a} = \frac{v}{2z + v};$$

werden nun die Werthe von $\frac{a + x}{a - x}$ und $\frac{x}{a}$ in die Formel (18) substituirt, so gelangt man zu folgendem Resultate:

$$\text{Log.}\left(\frac{z + v}{z}\right) = 2\left(\frac{v}{2z + v} + \frac{v^3}{3(2z + v)^3} + \frac{v^5}{5(2z + v)^5} + \ldots\ldots\right),$$

und endlich

$$\text{Log.}\,(z + v) = \text{Log.}\,z + 2\left(\frac{v}{2v + z} + \frac{v^3}{3(2z + v)^3} + \frac{v^5}{5(2z + v)^5} + \ldots\ldots\right).$$

Um z. B. den Logarithmen von 2 zu erhalten, mache man $v = 1$, $z = 1$, mithin $\text{Log. } z = o$, und substituire diese Werthe in die vorige Formel, man erhält alsdann:

$$\text{Log.}\,2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\,(3)^3} + \frac{1}{5\,(5)^5} + \ldots\right);$$

dieser Logarithme muss noch durch den Neperschen Logarithmen von 10 dividirt werden, um den gemeinen Logarithmen von 2 zu erhalten, Art. 291.

Von der Methode der rationalen Brüche.

293) Wir wollen nun den Ausdruck

$$\frac{Px^m + Qx^{m-1} + \ldots + Rx + S}{P'x^n + Q'x^{n-1} + \ldots + R'x + S'}\,dx,$$

integriren, worin der Multiplicator von dx ein rationaler Bruch ist. Wir werden im Folgenden zeigen, dass in dem gegebenen Ausdrucke immer n grösser als m angenommen werden könne. Denn im entgegengesetzten Falle liese sich die Integration auf jene eines Differenzials von derselben Form zurückbringen, in welchem die höchste Potenz von x im Nenner die höchste Potenz von x im Zähler überstiege; in diesem Falle würde es genügen, die Division nach folgendem Beispiele zu verrichten.

Es sei nämlich:

$$\frac{Px^3 + Qx^2 + Rx + S}{Q'^2x^2 + R'x + S'};$$

dividirt man alle Glieder durch Q', so erhält man

$$\frac{\frac{P}{Q'}x^3 + \frac{Q}{Q'}x^2 + \frac{R}{Q'}x + \frac{S}{Q'}}{x^2 + \frac{R'}{Q'}x + \frac{S'}{Q'}};$$

setzt man

$$\frac{P}{Q'} = P''; \quad \frac{Q}{Q'} = Q''; \quad \frac{R}{Q'} = R''; \quad \frac{S}{Q'} = S'',$$
$$\frac{R'}{Q'} = R'''; \quad \frac{S'}{Q'} = S''';$$

so hat man

$$\frac{P''x^3 + Q''x^2 + R''x + S''}{x^2 + R'''x + S'''}.$$

Man verrichte nun die Division auf folgende Weise:

$$\begin{array}{l|l} P''x^3 + Q''x^2 + R''x + S'' & x^2 + R'''x + S''' \\ \hline -P''x^3 - R''x^2 - P''S'''x & P''x + M \end{array}$$

$$\text{1r Rest } (Q'' - R'''P'')x^2 + (R'' - P''S''')x + S''';$$

bezeichnet man durch M und N die Coëfficienten von x^2 und x, so wird

der erste Rest $Mx^2 + Nx + S'''$.

Durch Fortsetzung der Division $-Mx^2 - MR'''x - MS'''$

zweiter Rest . . . $(N - MR''')x + S'' - MS'''$;

welcher letztere Rest durch $Kx + L$ bezeichnet werden mag; alsdann ist

$$\frac{Px^3 + Qx^2 + Rx + S}{Q'x^2 + R'x + S'} \cdot dx = (P''x + M)\,dx + \frac{(Kx + L)\,dx}{x^2 + R'''x + S'''};$$

wird integrirt, so erhält man

$$\int \frac{Px^3 + Qx^2 + Rx + S}{Q'x^2 + R'x + S'}\,dx = P''\,\frac{x^2}{2} + Mx + \int \frac{(Kx + L)\,dx}{x^2 + R'''x + S'''} + C,$$

so dass nun die Aufgabe auf die Integration von

$$\frac{(Kx + L)\,dx}{x^2 + R'''x + S'''}$$

zurückgebracht ist.

294) Aus dem vorhergehenden Verfahren erhellet, dass überhaupt die Integration eines jeden Bruchs auf die Integration von

$$\frac{Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \ldots + Rx + S}{P'x^n + Q'x^{n-1} + \ldots + R'x + S'}\,dx$$

sich zurückführen lasse.

Betrachtet man den Nenner dieses Bruchs als das Produkt von n Faktoren, $x - a$, $x - b$, $x - c, \ldots$; so können diese Faktoren reell, imaginär, gleich oder ungleich sein.

Um mit dem einfachen Falle den Anfang zu machen, wollen wir sie erst reell und ungleich annehmen, für welchen Fall nach folgenden Beispielen zu verfahren ist.

295) Es sei nämlich $\frac{a\,dx}{x^2 - a^2}$ zu integriren. Wird der Nenner in seine Faktoren zerlegt, so kann man den Bruch auf folgende Weise schreiben:

$$\frac{a\,dx}{x^2 - a^2} = \frac{a\,dx}{(x - a)(x + a)};$$

man nehme an:

$$\frac{a\,dx}{x^2 - a^2} = \left(\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}\right) dx \;.\;.\;.\;.\;.\; (19),$$

wo A und B constante Grössen sind, die bestimmt werden müssen. Deshalb bringe man den zweiten Theil der Gleichung unter einerlei Benennung, und man erhält

$$\frac{a\,dx}{x^2 - a^2} = \frac{(Ax + Aa + Bx - Ba)\,dx}{(x - a)(x + a)};$$

lässt man den gemeinschaftlichen Nenner weg, und dividirt auf beiden Seiten durch dx, so bleibt

$$a = Ax + Aa + Bx - Ba \;.\;.\;.\;.\; (20);$$

wird nach x geordnet:

$$(A + B)\,x + (A - B - 1)\,a = o,$$

wo der Werth von x unbestimmt ist, wie es vermöge des gegebenen Differenzials angenommen wurde, (denn aus der Charakteristik d, welche dem x vorgesetzt ist, erhellet, dass x als eine Veränderliche betrachtet werde); diese Gleichung findet Statt, was auch x bedeuten mag; man kann folglich, nach der Lehre der unbestimmten Coëfficienten, jeden Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von x gleich Null setzen; oder was dasselbe ist, man kann die Glieder der Gleichung (20), die mit denselben Potenzen von x behaftet sind, unter sich gleich setzen; man hat alsdann:

$$A + B = o;\; (A - B - 1)\,a = o;$$

hieraus ergiebt sich

$$A = {}^1\!/_2;\; B = -\,{}^1\!/_2.$$

Werden nun diese Werthe in der Gleichung (19) substituirt, so hat man

$$\int \frac{a\,dx}{x^2 - a^2} = \frac{{}^1\!/_2\,dx}{x - a} - \frac{{}^1\!/_2\,dx}{x + a},$$

wird wirklich integrirt

$$\int \frac{a\,dx}{x^2 - a^2} = {}^1\!/_2\,\text{Log.}\,(x - a) - {}^1\!/_2\,\text{Log.}\,(x + a) + C,$$

folglich

$$\int \frac{adx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2} \text{Log.} \left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C$$

$$= \text{Log.} \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Als zweites Beispiel wollen wir den Bruch $\frac{a^3 + bx^2}{a^2x - x^3}\,dx$ betrachten.

Die Faktoren des Nenners sind x und $a^2 - x^2$; und da sich letzterer noch in $a - x$, und $a + x$ zerlegen lässt; so sind die einfachen Faktoren des Nenners x, $a - x$, und $a + x$; der zu integrirende Ausdruck ist also;

$$\frac{a^3 + bx^2}{x\,(a-x)\,(a+x)}\,dx.$$

Man mache

$$\frac{a^3 + bx^2}{x\,(a-x)\,(a+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a-x} + \frac{C}{a+x} \ldots (21):$$

bringt man diese Brüche unter einerlei Benennung; so ist:

$$\frac{a^3+bx^2}{x\,(a-x)\,(a+x)} = \frac{Aa^2 - Ax^2 + Bax + Bx^2 + Cax - Cx^2}{x\,(a-x)\,(a+x)}.$$

Setzt man die Coëfficienten gleicher Potenzen von x unter sich gleich; so hat man:

$$B - A - C = b;\ Ba + Ca = o;\ Aa^2 = a^3.$$

Aus der letztern dieser Gleichungen ergiebt sich $A = a$; und vermittelst dieser wird die erste $B - C = a + b$.

Wird diese mit der zweiten verglichen, so erhält man;

$$B = \frac{a+b}{2};\ C = -\frac{a+b}{2}..$$

Werden diese Werthe von A, B und C in die Gleichung (21) eingeführt; so geht sie in folgende über:

$$\frac{a^3+bx^2}{a^2x-x^3}\,dx = \frac{adx}{x} + \frac{a+b}{2\,(a-x)}\,dx - \frac{a+b}{2\,(a+x)}\,dx;$$

wird dann integrirt, so ist:

$$\int \frac{a^3 + bx^2}{a^2x - x^3} dx = a \operatorname{Log.} x - \frac{a+b}{2} \operatorname{Log.} (a - x)$$

$$- \frac{a+b}{2} \operatorname{log.} (a + x) + C \text{ *)}$$

$$= a \operatorname{Log.} x - \frac{a+b}{2} [\operatorname{Log.} (a - x)$$

$$+ \operatorname{Log.} (a + x)] + C$$

$$= a \operatorname{Log.} x - \frac{a+b}{2} \operatorname{Log.} (a - x)(a + x) + C$$

$$= a \operatorname{Log.} x - \frac{a+b}{2} \operatorname{Log.} (a^2 - x^2) + C$$

$$= a \operatorname{Log.} x - (a + b) \operatorname{Log.} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

296) Es sei *drittens:*

$$\frac{3x - 5}{x^2 - 6x + 8} dx.$$

Hier ist zuerst Rücksicht zu nehmen auf die Zerlegung des Nenners in Faktoren vom ersten Grade. Bemerkt man, dass wenn einer Gleichung von der Form $z^2 - 6z + 8$, durch $z = 2$, und $z = 4$ Genüge geleistet wird; man mit Recht schliessen könne, sie sei dem Produkte $(z - 2)(z - 4) = o$ gleich. Verrichtet man nun die Multiplication, so ist offenbar, dass das Produkt immer $z^2 - 6z + 8$ sein werde, welchen Werth man auch der Grösse z beilegen mag. Schreibt man nun x statt z, so hat man auch

$$(x - 2)(x - 4) = x^2 - 6x + 8.$$

*) Um das Integral von $\frac{a+b}{2(a-x)}$ dx, als dem Differenzial von $a - x$ und $-$ dx zu nehmen, schreibe man

$$-\frac{(a+b)}{2} \times -\frac{dx}{a-x},$$

woraus erhellet, dass das Integral $-\frac{a+b}{2}$ Log. $(a - x)$ + C sein werde.

(Anmerk. des Verf.)

Welches daher immer der Werth des Polynomiums $x^2 - 6x + 8$ sein mag, so lässt er sich in Faktoren zerlegen, als wenn er gleich Null wäre.

Sind also 2 und 4 die Wurzeln der Gleichung $x^2 - 6x + 8 = 0$; so kann man schreiben:

$$\frac{3x - 5}{x^2 - 6x + 8} dx = \frac{Adx}{x - 2} + \frac{Bdx}{x - 4} \quad \ldots\ldots (22).$$

Hebt man den gemeinschaftlichen Faktor dx auf, welches in der Folge immer sorgfältig geschehen muss, und bringt die Brüche unter einerlei Benennung; so findet man:

$$\frac{3x - 5}{x^2 - 6x + 8} = \frac{Ax - 4A + Bx - 2B}{x^2 - 6x + 8}.$$

Setzt man die Coëfficienten gleicher Potenzen von x unter sich gleich, so erhält man folgende Bedingungsgleichungen:

$$-5 = -4A - 2B;\ 3 = A + B;$$

hieraus

$$B = \tfrac{7}{2};\ A = -\tfrac{1}{2}.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung (22) gesetzt, so ist:

$$\int \frac{3x - 5}{x^2 - 6x + 8} = -\tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 2} + \tfrac{7}{2} \int \frac{dx}{x - 4} + C$$

$$= \tfrac{7}{2} \text{Log.}(x - 4) - \tfrac{1}{2} \text{Log.}(x - 2) + C$$

297) Es sei *viertens*:

$$\frac{xdx}{x^2 + 4ax - b^2}.$$

Wird der Nenner $x^2 + 4ax - b^2 = 0$ gesetzt und die Gleichung aufgelöst; so ist:

$$x^2 + 4ax - b^2 = (x + 2a + \sqrt{4a^2 + b^2})$$
$$(x + 2a - \sqrt{4a^2 + b^2}).$$

Der Einfachheit wegen bezeichne man das letztere Produkt durch

$$(x + K)\ (x + L),$$

und setze dann

$$\frac{x}{x^2 + 4ax - b^2} = \frac{Ax + AL + Bx + BK}{x^2 + 4ax - b^2},$$

Hieraus ergiebt sich:

$$AL + BK = 0;\ A + B = 1;$$

folglich

$$A = \frac{K}{K-L};\ B = -\frac{L}{K-L};$$

und daher

$$\int \frac{xdx}{x^2 + 4ax - b^2} = \frac{K}{K-L} \text{Log.}(x+K) - \frac{L}{K-L} \text{Log.}(x+L) + C.$$

298) Es sei nun im Allgemeinen:

$$\frac{Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots Rx + S}{x^m + Q'x^{m-1} + \ldots + R'x + S'} dx$$

ein rationaler Bruch, in welchem die Faktoren des Nenners vom ersten Grade und unter sich ungleich angenommen werden. Man löse die Gleichung

$$x^m + Q'x^{m-1} + \ldots + R'x + S' = 0;$$

auf; hat man gefunden, dass sie das Produkt aus den Faktoren $x - a$, $x - b$, $x - c$, ... ist, so schreibe man

$$\frac{Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Rx + S}{x^m + Q'x^{m-1} + \ldots + R'x + S'} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots\ldots$$

Wird der zweite Theil dieser Gleichung unter einerlei Benennung gebracht, so muss jeder Zähler eines Bruchs durch das Produkt der Nenner aller übrigen, d. i. durch ein Polynomium in x von der Ordnung $m - 1$, vervielfacht werden; der zweite Theil dieser Gleichung wird also ein Polynomium von m Gliedern sein. Hieraus erhellet, dass wenn man die Coëfficienten derselben Potenzen von x unter sich gleich setzt, man m Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Coëfficienten A, B, C, ... erhalten werde. Sind diese Coëfficienten

bekannt, so hat man nur eine Reihe von Ausdrücken folgender Formen zu integriren

$$\frac{Adx}{x - a}; \frac{Bdx}{x - b}; \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Das gesuchte Integral wird daher sein:

$$A \text{ Log. } (x - a) + B \text{ Log. } (x - b) + \ldots + C.$$

299) Die Methode, welche wir befolgt haben, wenn die Wurzeln des Nenners ungleich sind, lässt sich nicht mehr gebrauchen, sobald unter den reell angenommenen Wurzeln einige gleiche gefunden werden. Denn wir haben gesehen, dass unter der Voraussetzung ungleicher Wurzeln das Polynomium so dargestellt werden könne,

$$\frac{Px^4 + Qx^3 + Rx^2 + Sx + T}{(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)} =$$

$$= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{a-c} + \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e};$$

wären mehrere unter den Wurzeln gleich, z. B. $a = b = c$; so gienge die vorige Gleichung in folgende über:

$$\frac{Px^4 + \ldots}{(x-a)^3(x-d)(x-e)} = \frac{A + B + C}{x - a} + \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e}.$$

Wird auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens unter einerlei Benennung gebracht, und $A + B + C$ als eine einzige Constante A' betrachtet, so reichen offenbar die drei Constanten A', D und E nicht hin, um fünf Bedingungsgleichungen zu bekommen, die doch nothwendig sind, wenn man die Coëfficienten derselben Potenzen von x unter sich gleich setzen will.

300) Um dieser Unbequemlichkeit auszuweichen, wollen wir suchen, den Bruch

$$\frac{Px^4 + Qx^3 + \ldots}{(x - a)^3 (x - d)(x - e)}$$

in eine andere Reihe von Brüchen zu zerlegen, die,

wenn sie unter gleiche Benennung gebracht werden, den gegebenen wieder erzeugen.

Wir nehmen also an:

$$\frac{Px^4 + Qx^3 + \ldots}{(x-a)^3 (x-d)(x-e)} = \frac{A + Bx + Cx^2}{(x-a)^3} + \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e}.$$

Wird auf der Rechten des Gleicheitszeichens unter einerlei Benennung gebracht, so erhält man auf diese Art ein Polynomium in x vom 4ten Grade, welches fünf Constanten enthält, die hinreichend sind zur Identität der Glieder, welche mit gleichen Potenzen von x behaftet sind. Ich will nun beweisen, dass das Glied

$$\frac{A + Bx + Cx^2}{(x-a)^3}$$

sich unter folgende Form bringen lasse:

$$\frac{A'}{(x-a)^3} + \frac{B'}{(x-a)^2} + \frac{C'}{x-a},$$

wo A', B', C' unbestimmte constante Grössen sind. Um diess zu beweisen, sei

$$x - a = z;$$

mithin

$$x = z + a;$$

also

$$\frac{A + Bx + Cx^2}{(x-a)^3} = \frac{A + Ba + Ca^2 + Bz + 2\,Caz + Cz^2}{z^3}$$

$$= \frac{A + Ba + Ca^2}{z^3} + \frac{B + 2\,Ca}{z^2} + \frac{C}{z};$$

setzt man den Werth von z in diese Gleichung, so ist:

$$\frac{A + Bx + Cx^2}{(x-a)^3} = \frac{A + Ba + Ca^2}{(x-a)^3} + \frac{B + 2\,Ca}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-a},$$

welches Resultat die vorgeschriebene Form hat, weil A', B', C' beständige Grössen sind.

Da dieser Beweis sich auf eine Gleichung von einem höhern Grade anwenden lässt, so kann man im Allgemeinen schliessen

$$\frac{Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots . Rx + S}{(x-a)^m}$$

$$= \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A'}{(x-a)^{m-1}} + \frac{A''}{(x-a)^{m-2}} + \ldots + \frac{A^n}{(x-a)}.$$

Hieraus geht hervor, dass man, um den Ausdruck

$$\frac{Px^4 + \ldots}{(x-a)^3(x-d)(x-e)}\,dx$$

zu integriren, annehmen müsse:

$$\frac{Px^4 + \ldots}{(x-a)^3(x-d)(x-e)}$$

$$= \frac{A}{(x-a)^3} + \frac{A'}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A^n}{(x-a)} + \frac{D}{(x-d)} + \frac{E}{(x-e)}.$$

Werden diese Brüche unter einerlei Benennung gebracht, so kann man nach obigem Verfahren die constanten Grössen A, A', A'', ... A^n, D, E bestimmen, und man hat alsdann die Integrale folgender Ausdrücke zu finden:

$$\frac{E}{x-e}dx;\ \frac{D}{x-d}dx;\ \frac{A^n}{x-a}dx;\ \frac{A'}{(x-a)^2}dx;\ \frac{A}{(x-a)^3}dx.$$

Die drei ersten lassen sich durch Logarithmen integriren; was die beiden letztern anbelangt, so nehmen wir, Art. 270, $x - a = z$ an; und da dx das Differenzial ist von dem Ausdrucke $x - a$, der sich zwischen den Klammern befindet, so werden wir haben:

$$\int \frac{A'dx}{(x-a)^2} = \int \frac{A'dz}{z^2} = \int A'z^{-2}\,dz = -\frac{A'}{z}$$

$$= -\frac{A'}{x-a};$$

$$\int \frac{A''dx}{(x-a)^3} = \int \frac{A''dz}{z^3} = \int A''z^{-3}\,dz = -\frac{A''}{2z^2}$$

$$= -\frac{A''}{2(x-a)^2};$$

und daher

$$\int \frac{Px^4 + Qx^2 + \ldots}{(x-a)^3(x-d)(x-e)} = -\frac{A'}{x-a} - \frac{A''}{2(x-a)^2}$$

$$+ \ldots + A^n \text{Log.}(x-a) + D\,\text{Log.}(x-d) + E\,\text{Log.}(x-e)$$

$$+ \text{Constante}.$$

301) Es sei z. B. der Bruch

$$\frac{2axdx}{(x+a)^2}$$

gegeben; hier hat man

$$\frac{2ax}{(x+a)^3} = \frac{A}{(x+a)^2} + \frac{A'}{x+a}.$$

Werden die Brüche zur Rechten des Gleichheitszeichens unter einerlei Benennung gebracht, und der gemeinschaftliche Nenner vernachlässigt, so bleibt stehen:

$$2ax = A + A'x + A'a;$$

woraus folgende Bedingungsgleichungen abgeleitet werden:

$$2a = A'; \; A + A'a = o;$$

diese geben

$$A' = 2a; \; A = -2a^2;$$

folglich

$$\frac{2axdx}{(x+a)^2} = -\frac{2a^2dx}{(x+a)^2} + \frac{2adx}{(x+a)} \; . \; . \; . \; (23).$$

Um zum Integral zu gelangen, bemerke man, dass dx das Differenzial von $x + a$ ist; desswegen kann man $x + a = z$ setzen, alsdann ist

$$\int \frac{2axdx}{(x+a)^2} = -2a^2 \frac{dz}{z^2} + 2a \frac{dz}{z}.$$

Integrirt man den ersten Bruch des zweiten Theils der Gleichung mit Hilfe der Regel, Art. 262, und den andern durch Logarithmen, so erhalten wir:

$$\int \frac{2axdx}{(x+a)^2} = \frac{2a^2}{z} + 2a \text{ Log. } z + C;$$

wird der Werth von z restituirt,

$$\int \frac{2axdx}{(x+a)^2} = -\frac{2a^2}{a+x} + 2a \text{ Log. } (a+x) + C.$$

302) Als zweites Beispiel wollen wir das Integral von

$$\frac{x^2dx}{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}$$

suchen. Setzt man den Nenner gleich Null, so verschwinden offenbar alle Glieder für $x = a$; die Glei-

chung $x^3 - ax^2 - ax^2 + a^3$ ist daher durch $x - a$ theilbar. Wird die Division verrichtet, so erscheint der Quotient $x^2 - a^2$. Die zu integrirende Grösse ist also

$$\frac{x^2dx}{(x^2 - a^2)(x - a)} = \frac{x^2dx}{(x + a)(x - a)(x - a)}$$

$$= \frac{x^2dx}{(x - a)^2 (x + a)}.$$

Wir nehmen daher an:

$$\frac{x^2}{(x - a)^2 (x + a)} = \frac{A}{(x - a)^2} + \frac{A'}{(x - a)} + \frac{B}{x + a} \ldots\ldots (24);$$

wird der zweite Theil unter einerlei Benennung gebracht, so ergiebt sich

$$\frac{x^2}{(x - a)^2 (x + a)} = \frac{A(x + a) + A'(x^2 - a^2) + B(x - a)^2}{(x + a)(x - a)^2}.$$

Wird entwickelt, und die Coëfficienten, die mit gleichen Potenzen von x behaftet sind, unter sich gleich gesetzt; so gelangt man zu folgenden Bedingungsgleichungen:

$$A' + B = 1;\ A - 2Ba = o;\ Aa - A'a^2 + Ba^2 = o \ldots\ldots (25).$$

Multiplicirt man die erste durch a^2, und addirt das Resultat zur dritten, so hat man

$$Aa + 2Ba^2 = a^2;$$

wird diese neue Gleichung zur zweiten der Gleichungen (25), die erst durch a vervielfacht ist, addirt, so findet man

$$a^2 = 2Aa;\ \text{und daher}\ A = \tfrac{1}{2}a.$$

Wird dieser Werth von A in die zweite Gleichung (25) gesetzt, so ist

$$B = \tfrac{1}{4};$$

es ergiebt sich also aus der ersten

$$A' = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

Durch die Werthe dieser Constanten wird die Gleichung (24), welche durch dx vervielfacht werden muss, in folgende umgeändert:

$$\frac{x^2dx}{(x - a)^2 (x + a)} = \frac{adx}{2(x - a)^2} + \frac{3dx}{4(x - a)} + \frac{dx}{4(x + a)}.$$

Um $\frac{adx}{2(x-a)^2}$ zu integriren, mache man $x - a = z$, alsdann wird jener Ausdruck $\frac{adz}{2z^2} = \frac{az^{-2}}{2} dz$, dessen Integral, nach Art. 262, ist

$$-\frac{2az^{-1}}{2} = -\frac{a}{z} = -\frac{a}{2(x-a)};$$

mithin

$$\int \frac{x^2dx}{(x-a)^2(x+a)} = -\frac{a}{2(x-a)} + \tfrac{3}{4}\,\text{Log.}(x+a)$$
$$+ \tfrac{1}{4}\,\text{Log.}(x+a) + C.$$

303) Man wird auf dieselbe Weise verfahren, wenn im Nenner mehrere Gruppen gleicher Wurzeln sich vorfinden. Es sei z. B.

$$\frac{adx}{(x^2-1)^2} = \frac{adx}{(x-1)^2(x+1)^2}.$$

In diesem Falle setze man:

$$\frac{adx}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{A'}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{B'}{x+1} \quad \ldots\ldots (26).$$

Wird unter gleiche Benennung gebracht, so findet man:

$$\frac{a}{(x-1)^2(x+1)^2}$$
$$= \frac{A(x+1)^2 + A'(x-1)(x+1)^2 + B(x-1)^2 + B'(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}.$$

Lässt man den gemeinschaftlichen Nenner weg und entwickelt den Zähler, so erhält man folgende Bedingungsgleichungen:

$$A' + B' = o,$$
$$A + A' + B - B' = o,$$
$$2A - A' - 2B - B' = o,$$
$$A - A' + B + B' = a.$$

Vermittelst der ersten dieser Gleichungen geht die dritte in folgende über $2A - 2B = o$, mithin $A = B$; durch die zweite wird die vierte $2A + 2B = a$; aus diesen Gleichungen leitet man folgende ab, $A = \frac{a}{4} = B$, und folglich die vierte $B' - A' = \frac{1}{2} a$; wird diese Gleichung mit der ersten verglichen, so findet man:

$$A' = -\frac{a}{4};\ B' = \frac{a}{4}.$$

Durch die Werthe dieser Constanten nimmt das gegebene Differenzial folgende Form an:

$$\frac{1}{4} a \left[\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{dx}{x-1} + \frac{dx}{x+1}\right].$$

Integrirt man die beiden ersten Glieder nach Art. 270, und 262, und die andern durch Logarithmen, so erhält man:

$$\int \frac{adx}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4} a \left[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \text{Log.}(x-1) + \text{Log.}(x+1)\right] + C.$$

304) Bevor wir nun den Fall untersuchen, wo der Nenner imaginäre Wurzeln enthält, müssen wir über diese Art Grössen einige Bemerkungen beifügen. Betrachten wir also die Gleichung

$$x^2 + px + q = o \ldots\ldots\ldots (27),$$

und suchen die nothwendigen Bedingungen auf, unter welchen die Wurzeln dieser Gleichung imaginär seien. Wird daher die Gleichung aufgelöst, so findet man:

$$x = -\frac{1}{2} p \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Die erste nothwendige Bedingung, dass dieser Werth für x imaginär sei, ist, dass das letzte Glied der Gleichung (27) positiv sei. Denn wäre es negativ, so würde der Ausdruck $- q$, der unter dem Wurzelzeichen sich

befindet, sein Zeichen ändern, und unter dem Wurzelzeichen befänden sich alsdann nur positive Grössen, mithin könnte x nicht imaginär sein. Ist dieser Bedingung Genüge geleistet, so wird x imaginär sein, wenn q grösser ist, als $\frac{1}{4}p^2$. Der Ueberschuss von q über $\frac{1}{4}p^2$, der natürlicherweise eine positive Grösse ist, werde durch β^2 bezeichnet; und weil das Quadrat einer Grösse immer positiv ist, so hat man:

$$q = \tfrac{1}{4}p^2 + \beta^2;$$

man setze, um die Brüche zu verhüten, $\frac{p}{2} = \alpha$; hiedurch wird die vorhergehende Gleichung

$$q = \alpha^2 + \beta^2.$$

Durch Substitution dieser Werthe von p und q in die gegebene Gleichung, erhält man

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0 \; \ldots\ldots \; (28).$$

Wird diese Gleichung aufgelöst, so giebt sie

$$x = -\alpha \pm \beta\sqrt{-1} \; \ldots\ldots \; (29);$$

ihre beiden Wurzeln sind also

$$-\alpha + \beta\sqrt{-1} \text{ und } -\alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

Hieraus erhellet, dass diese Wurzeln immer paarweise geordnet sind, so zwar, dass wenn eine von ihnen bekannt ist, die andere von selbst sich ergiebt, indem blos das Zeichen des imaginären Theils verändert wird.

305) Eine Gleichung kann im Allgemeinen mehrere Paare imaginärer Wurzeln haben; jedes Paar kann einen Faktor von folgender Form geben:

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0 \; \ldots\ldots \; (30).$$

306) Bisweilen sind die Wurzeln gleich und nur die Zeichen verschieden, welches alsdann Statt findet, wenn $\alpha = 0$; in diesem Falle ist die eine Wurzel $\beta\sqrt{-1}$, die andere $-\beta\sqrt{-1}$, und der Faktor (30) vom zweiten Grade wird auf

$$x^2 + \beta^2$$

reducirt.

307) Um ein Beispiel von einer Gleichung zu geben, derer Wurzeln imaginär sind, sei

$$x^2 - 6ax + 10a^2 = o;$$

wird diese Gleichung aufgelöst, so findet man:

$$x = 3a \pm \sqrt{-a^2} = 3a \pm a\sqrt{-1};$$

vergleicht man diesen Werth von x mit der Gleichung (29): so ergiebt sich:

$$-\alpha = 3a; \; \beta = a.$$

Für den gegenwärtigen Fall wird also die Gleichung (30)

$$x^2 - 6ax + 9a^2 + a^2.$$

308) Hat man übrigens eine Gleichung von der Form

$$x^2 + 4x + 12 = o,$$

derer Wurzeln imaginär sind (welches man daran erkennt, wenn die Bedingungen des Art. 304 erfüllt sind), so kann man sie unmittelbar mit der Formel (30) vergleichen; hiedurch erhält man $2\alpha = 4$, mithin $\alpha^2 = 4$; nimmt man 4 von 12 weg, so bleibt noch 8 für β^2, und die vorgelegte Gleichung lässt sich unter folgende Form bringen:

$$x^2 + 4x + 4 + 8 = 0.$$

Es ist wahr, dass das Glied 8 kein vollkommenes Quadrat ist, man kann aber 8 als das Quadrat von $\sqrt{8}$ ansehen.

309) Wir wollen uns nun mit der Integration derjenigen rationalen Brüche beschäftigen, derer Nenner imaginäre Faktoren enthalten. Und um mit dem einfachsten Falle anzufangen, wollen wir jenen zuerst betrachten, wo in dem Nenner nur ein Paar imaginärer Wurzeln vorkömmt. Nehmen wir also an, man hätte durch Zerlegung des Nenners in seine Faktoren gefunden

$$\frac{P + Qx + Rx^2 + Sx^3 + \ldots\ldots}{(x-a)(x-b)\ldots\ldots(x-h)(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)}dx.$$

Man setze diesen Bruch, wie es schon Art. 300 geschehen ist, folgender Reihe von Brüchen gleich:

$$\frac{Adx}{x-a} + \frac{Bdx}{x-b} + \ldots + \frac{Hdx}{x-h} + \frac{Mx + N}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}dx.$$

Hat man die Werthe der Constanten A, B, ... H, M, N nach dem schon angezeigten Verfahren bestimmt; so lassen sich alle Glieder, das letzte ausgenommen, durch Logarithmen integriren. Das letzte Glied aber wird auf folgende Art integrirt:

Man bemerke, dass, da $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$ ein vollständiges Quadrat ist, das zu integrirende Glied sich auch so darstellen lasse:

$$\frac{Mx + N}{(x + \alpha)^2 + \beta^2} dx;$$

wird $x + \alpha = z$ gesetzt, so hat man

$$\frac{Mz + N - M\alpha}{z^2 + \beta^2} dz.$$

Bezeichnet man den constanten Theil $N - M\alpha$ durch P, so ist

$$\frac{Mz + P}{z^2 + \beta^2} dz;$$

dieser Ausdruck kann wieder in

$$\frac{Mzdz}{z^2 + \beta^2} + \frac{Pdz}{z^2 + \beta^2}$$

zerlegt werden. Um den ersten Theil zu integriren, bemerke man, dass zdz mit einem constanten Faktor das Differenzial von $z^2 + \beta^2$ ist, man kann also, Art. 271, $z^2 + \beta^2 = y$ setzen; wird differenziirt, so ergiebt sich

$$zdz = \frac{dy}{2};$$

wird substituirt, so erhält man $\frac{Mdy}{2y}$, dessen Integral sein wird

$$\frac{M}{2} \text{Log. } y = \frac{M}{2} \text{Log. } (z^2 + \beta^2) = \frac{M}{2} \text{Log. } [(x + \alpha)^2 + \beta^2]$$

$$= \frac{M}{2} \text{Log. } (x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)$$

$$= M \text{ Log. } (x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$$

$$= M \text{ Log. } \sqrt{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2}.$$

Was den Ausdruck $\frac{Pdz}{z^2+\beta^2}$ anbelangt, dividire man Zähler und Nenner durch β^2, da er dann unter folgende Form gebracht werden kann:

$$\frac{P}{\beta}\cdot\frac{\frac{dz}{\beta}}{\frac{z^2}{\beta^2}+1},$$

dessen Integral, wie leicht zu sehen ist,

$$\frac{P}{\beta}\,\text{Bog.}\left(\text{Tang.}=\frac{z}{\beta}\right)=\frac{N-M\alpha}{\beta}\,\text{Bog.}\left(\text{Tang.}=\frac{x+\alpha}{\beta}\right);$$

daher

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}$$

$$=M\text{Log.}\sqrt{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}+\frac{N-M\alpha}{\beta}\,\text{Bog.}\left(\text{Tang.}=\frac{x+\alpha}{\beta}\right)$$

$$\ldots\ldots\;(31).$$

310) Es sei ferner der Bruch $\frac{a+bx}{x^3-1}dx$ gegeben. Da der Nenner den Faktor $x-1$ hat, so findet man die andern, wenn x^3-1 durch $x-1$ dividirt wird; der vorgelegte Bruch lässt sich daher unter folgende Gestalt bringen:

$$\frac{a+bx}{(x-1)(x^2+x+1)}dx;$$

x^2+x+1 ist das Produkt zweier imaginären Faktoren, welches sich durch Auflösung der Gleichung $x^2+x+1=o$ bestätigt. Man schreibe also:

$$\frac{a+bx}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1};$$

wird unter gleiche Benennung gebracht und auf die angezeigte Weise verfahren, so findet sich:

$$A=\frac{a+b}{3};\ M=-\frac{(a+b)}{3};\ N=\frac{b-2a}{3}.$$

Hierauf zerlege man den zusammengesetzten Faktor

$x^2 + x + 1$ in einfache, indem man ihn mit dem Ausdrucke (30) vergleicht. Man erhält:

$$2\alpha = 1;\ \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

folglich

$$\alpha = \tfrac{1}{2};\ \beta = \sqrt{\tfrac{3}{4}}.$$

Werden diese Werthe und jene für M und N in die Gleichung (31) vermittelst welcher man den zweiten Theil des Integrals enthält, eingeführt, und bemerkt, dass das Integral des ersten Theils

$$\int \frac{A dx}{x - 1} = \frac{a + b}{3} \text{ Log. } (x - 1),$$

so erhält man:

$$\int \frac{(a+bx)dx}{x^3 - 1} = \frac{a+b}{3} \text{Log.}(x-1) - \frac{(a+b)}{3} \text{ Log. } \sqrt{x^2+x+1}$$

$$+ \frac{(b-a)}{\sqrt{3}} \text{ Bog. } \left[\text{Tang.} = \frac{(x + \frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right] + C.$$

311) Finden sich im Nenner gleiche imaginäre Faktoren, so ist einer oder mehrere unter ihnen des zweiten Grades von folgender Form:

$(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^p$, je nachdem der Bruch eine oder mehrere Gruppen gleicher imaginärer Faktoren enthält. Der Faktor

$$(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^p$$

wird folgender Reihe entsprechen

$$\frac{H + Kx}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^p} + \frac{H' + K'x}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^{p-1}}$$

$$+ \frac{H'' + K''x}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^{p-2}} + \ldots + \frac{H_1 + K_1 x}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2} \cdots (32).$$

Verfährt man eben so, wie mit den andern Gruppen gleicher Faktoren, so kann man dadurch die Constanten $H, K, H', K', H'', K'', \ldots . H_1, K_1, \ldots .$ wie vorhin bestimmen.

Multiplicirt man hierauf durch dx, so braucht man nur noch jedes Glied besonders zu integriren, welches

keine Schwierigkeiten hat, wenn man das erste Glied der Reihe (32) zu integriren weiss: denn alle folgenden haben dieselbe Form. Zu diesem Endzwecke wollen wir diesem Gliede folgende Gestalt geben:

$$\frac{H + Kx}{[(x+\alpha)^2 + \beta^2]^p} dx;$$

wird $x + \alpha = z$ gesetzt

$$\frac{H - K\alpha + Kz}{(\beta^2 + z^2)^p} dx;$$

wird der constante Theil $H - K\alpha$ durch M bezeichnet, so hat man

$$\frac{M + Kz}{(\beta^2 + z^2)^p} dz$$

zu integriren. Dieser Bruch kann in folgende zwei zerlegt werden:

$$\frac{Kzdz}{(\beta^2 + z^2)^p} + \frac{Mdz}{(\beta^2 + z^2)^p}.$$

Da zdz nebst einem beständigen Faktor das Differenzial von $\beta^2 + z^2$ ist, so wollen wir um bequemer integriren zu können, $\beta^2 + z^2 = y$ setzen (Art. 271); hieraus folgt $zdz = \frac{1}{2} dy$; durch Substitution erhalten wir:

$$\int \frac{Kzdz}{(\beta^2 + z^2)^p} = \int \tfrac{1}{2} K \frac{dy}{y^p} = \tfrac{1}{2} K \int y^{-p} = \tfrac{1}{2} . \frac{Ky^{-p+1}}{1-p}$$

$$= \tfrac{1}{2} K \frac{(\beta^2 + z^2)^{-p+1}}{1-p} = \tfrac{1}{2} . \frac{K}{1-p} . \frac{1}{(\beta^2 + z^2)^{p-1}} + C.$$

Es bleibt nun noch die Integration von $\frac{Mdz}{(\beta^2 + z^2)^p}$ oder vielmehr

$$M (\beta^2 + z^2)^{-p} dz \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (33)$$

übrig. Um hievon das Integral zu bekommen, wollen wir uns der Formel $\int (\beta^2 + z^2)^p dz$ auf folgende Art bedienen.

Vermindert man den Exponenten p um eine Einheit, so heisst dies eben soviel, als durch $\beta^2 + z^2$ dividiren;

multiplicirt man daher auch durch dieselbe Grösse, so erhält man folgende identische Gleichung:

$$(\beta^2 + z^2)^p\, dz = (\beta^2 + z^2)^{p-1}\, (\beta^2 + z^2)\, dz;$$

verrichtet man die angezeigte Multiplication, so ist

$$(\beta^3 + z^2)^p\, dz = \beta^2\, (\beta^2 + z^2)^{p-1} dz + (\beta^2 + z^2)^{p-1}\, z^2 dz;$$

wird integrirt

$$\int (\beta^2 + z^2)^p\, dz = \beta^2 \int (\beta^2 + z^2)^{p-1}\, dz + \int (\beta^2 + z^2)^{p-1}\, z^2 dz \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (34).$$

Wir lassen unter den zwei Integralen des zweiten Theiles der Gleichung (34) das erstere unter der angezeigten Form, und wenden auf das zweite die theilweise Integration an. Wird desshalb der Ausdruck $(\beta^2 + z^2)^{p-1}\, z^2 dz$ durch 2 vervielfacht und auch dividirt, so kann man ihm folgende Form geben:

$$\frac{z}{2}\, (\beta^2 + z^2)^{p-1}\, 2zdz \;.\;.\;.\;.\;.\; (35),$$

alsdann ist $(\beta^2 + z^2)^{p-1}\, 2zdz$ das Differenzial von $\frac{(\beta^2 + z^2)^p}{p}$, so dass also die Gleichung (35) in folgende übergeht:

$$\frac{z}{2}\, \mathrm{D}.\, \frac{(\beta^2 + z^2)^p}{p};$$

vergleicht man diesen Ausdruck mit der Formel

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

so ist

$$u = \frac{z}{2};\; v = \frac{(\beta^2 + z^2)^p}{p};$$

und man hat

$$\int \frac{z}{2}\, (\beta^2 + z^2)^{p-1}\, 2zdz = \frac{z}{2}\, \frac{(\beta^2 + z^2)^p}{p} - \int \frac{(\beta^2 + z^2)^p}{p}\, \frac{dz}{2}.$$

Substituirt man diesen Werth für das letzte Glied der Gleichung (34), und setzt die Constanten vor das

Integrationszeichen, so geht die Gleichung (34) in folgende über:

$$\int (\beta^2 + z^2)^p \, dz = \beta^2 \int (\beta^2 + z^2)^{p-1} dz$$

$$+ \frac{z}{2} \cdot \frac{(\beta^2 + z^2)^p}{p} - \frac{1}{2p} \cdot \int (\beta^2 + z^2)^p \, dz;$$

bringt man das letzte Glied auf die linke Seite des Gleichheitszeichens, und reducirt, so erhält man:

$$\frac{(1 + 2p)}{2p} \int (\beta^2 + z^2)^p \, dz = \frac{z}{2} \cdot \frac{(\beta^2 + z^2)^p}{p}$$

$$+ \beta^2 \int (\beta^2 + z^2)^{p-1} dz;$$

hieraus leitet man ab:

$$\int (\beta^2 + z^2)^{p-1} dz = - \frac{z}{2p\beta^2} (\beta^2 + z^2)^p$$

$$+ \frac{1 + 2p}{2p\beta^2} \int (\beta^2 + z^2)^p \, dz;$$

setzt man $p - 1 = - p$, mithin $p = 1 - p$, so hat man endlich

$$\int (\beta^2 + z^2)^{-p} dz$$

$$= - \frac{z}{2(1-p)\beta^2} (\beta^2 + z^2)^{-p+1} + \frac{3-2p}{(2-2p)\beta^2} \int (\beta^2 + z^2)^{-(p-1)} dz \quad (36).$$

Vermittelst dieser Formel macht man das Integral von $(\beta^2 + z^2)^{-p} dz$ von einer andern abhängig, worin der numerische Werth des Exponenten anstatt p eine Einheit geringer sein wird; durch dieselbe Formel macht man wieder das Integral von $(\beta^2 + z^2)^{-(p-1)} dz$ von dem Integral des Ausdrucks $(\beta^2 + z^2)^{-(p-2)} dz$ u. s. w. abhängig, so dass durch successive Substitution der Exponent des zu integrirenden Theils immer um eine Einheit verringert wird, und zuletzt nur noch der Ausdruck

$$(\beta^2 + z^2)^{-1} dz = \frac{dz}{\beta^2 + z^2}$$

zu integriren übrig bleibt; das Integral dieses Ausdrucks ist aber nach Art. 277

$$\frac{1}{\beta} \text{ Bog. } \left(\text{Tang.} = \frac{z}{\beta}\right).$$

Man lässt das Integral $\int (\beta^2 + z^2)^{-1}$ dz nicht on $\int (\beta^2 + z)^0$ dz abhängen, welche Grösse sich auf z reducirt, weil der Ausdruck

$$\frac{-z}{2(1-p)\beta^2}(\beta^2 + z^2)^{-p+1}$$

unendlich wird, wenn man in der Formel (36) $p = 1$ setzte.

313) Aus dieser Theorie geht hervor, dass die Integration eines jeden rationalen Bruchs nur von drei verschiedenen Formeln abhängt, nämlich von:

$$1^0.\ \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1};$$

$$2^0.\ \int \frac{dx}{x+a} = \text{Log.}\ (x+a);$$

$$3^0.\ \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\ \text{Bog.}\left(\text{Tang.} = \frac{x}{a}\right);$$

man sagt desshalb auch, dass jeder rationale Bruch immer entweder *algebraisch*, oder durch *Logarithmen*, oder durch *Kreisbögen* oder endlich durch Zusammenkunft dieser drei Mittel integrirt werden könne.

314) Wir wollen diese Lehre durch ein Beispiel beschliessen, worin alle Fälle vorkommen. Es sei daher der rationale Bruch

$$\frac{Px^m + P'x^{m-1} + P''x^{m-2} + \ldots.}{RR'R''\ldots SS'S''\ldots TT'\ldots UU'}\,dx$$

gegeben, worin

$$\left.\begin{array}{l} R = x - a \\ R' = x - b \\ R'' = x - c \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ \text{ungleiche reelle Faktoren;}$$

$$\left.\begin{array}{l} S = (x - e)^m \\ S, = (x - d)^n \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ \text{gleiche reelle Faktoren;}$$

$$\left.\begin{array}{l} T = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 \\ T' = x^2 + 2\alpha' x + \alpha'^2 + \beta'^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{ungleiche imaginäre Faktoren}$$

$$\left.\begin{array}{l} U = (x^2 + 2\alpha_{\prime}^2 + \alpha_{\prime}^2 + \beta_{\prime}^2)^p \\ U' = (x^2 + 2\alpha_{\prime\prime} x + \alpha_{\prime\prime}^2 + \beta_{\prime\prime}^2)^q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{gleiche imaginäre Faktoren}$$

anzeigen. Man nehme an

$$\frac{Px^m + P'x^{m-1} + P''x^{m-2} + \ldots}{RR'R'' \ldots SS' \ldots TT' \ldots UU' \ldots} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{E}{(x-e)^m} + \frac{E'}{(x-e)^{m-1}} + \frac{E''}{(x-e)^{m-2}} + \ldots$$

$$+ \frac{F}{(x-f)^n} + \frac{F'}{(x-f)^{n-1}} + \frac{F''}{(x-f)^{n-2}} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{G + Hx}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2} = \frac{K + Lx}{x^2 + 2\alpha' x + \alpha'^2 + \beta'^2} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{M + Nx}{(x^2 + 2\alpha_{\prime} x + \alpha_{\prime}^2 + \beta_{\prime}^2)^p} + \frac{M' + N'x}{(x^2 + 2\alpha_{\prime} x + \alpha_{\prime}^2 + \beta_{\prime}^2)^{p-1}} + \ldots$$

$$+ \frac{P + Qx}{(x^2 + 2\alpha_{\prime\prime} x + \alpha_{\prime\prime}^2 + \beta_{\prime\prime}^2)^q} + \frac{P' + Q'x}{(x^2 + 2\beta_{\prime\prime} x + \beta_{\prime\prime}^2 + \beta_{\prime\prime}^2)^{q-1}} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hat man die Brüche unter einerlei Benennung gebracht, so verfahre man nach der bisher erklärten Methode.

Von der Integration irrationaler Funktionen.

315) Wenn in einem Differenzial-Ausdrucke Wurzelgrössen vorkommen, so lassen sich diese mit Hilfe einer Umformung wegbringen, und die Integration beschränkt sich auf jene rationaler Brüche.

Man kann immer die Wurzelzeichen entfernen, wenn sie nur einfache Grössen nach sich haben; das hiebei anzuwendende Verfahren lässt sich aus folgendem Beispiele ableiten. Es sei

$$\frac{\sqrt{x} - 3a}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}\, dx, \text{ oder vielmehr } \frac{x^{1/2} - 3a}{x^{1/3} - x^{1/2}}\, dx.$$

Bringt man die gebrochenen Exponenten unter einerlei Benennung, so bekömmt man als gemeinschaftlichen Nenner die Zahl 6; man setze deshalb $x = z^6$; alsdann hat man

$$\sqrt{x} = z^3;\ \sqrt[3]{x} = z^2;\ dx = 6z^5\, dz;$$

und daher durch Substitution

$$\frac{\sqrt{x} - 3a}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}\, dx = \frac{z^3 - 3a}{z^2 - z^3}\, 6z^5 dz = \frac{z^6 - 3az^3}{1 - z}\, 6dz;$$

diesen Ausdruck integrire man nach der Methode, welche für rationale Brüche angewandt wurde, und restituire in dem Integral für z seinen Werth.

316) Anders verhält es sich, wenn die Wurzelgrösse zusammengesetzt ist. Man kann jedoch jeden Ausdruck in x integriren, welcher $\sqrt{A + Bx + Cx^2}$ enthält, d. i. jeden Ausdruck von folgender Form:

$$F(x, \sqrt{A + Bx + Cx^2})\, dx.$$

Es lassen sich hier zwei Fälle unterscheiden; entweder ist das Glied Cx^2 positiv oder negativ. Im Falle es positiv ist, schreibe man obigen Ausdruck also:

$$\sqrt{C}\sqrt{\frac{A}{C} + \frac{B}{C}x + x^2};$$

ist hingegen das Glied negativ, so lässt es sich als das Produkt von $+ C$ und $- x^2$ betrachten, und die Wurzelgrösse kann unter folgende Form gebracht werden:

$$\sqrt{C}\sqrt{\frac{A}{C} + \frac{B}{C}x - x^2}.$$

Setzt man der Einfachheit wegen

$$\frac{A}{C} = a; \frac{B}{C} = b;$$

so hat man folgende beide Ausdrücke

$$F(x, \sqrt{a + bx + x^2})\,dx,$$

und

$$F(x, \sqrt{a + bx - x^2})\,dx$$

zu integriren; wir wollen uns zuerst mit ersterm beschäftigen.

Da wir unserm Zwecke gemäss durch Umformung die Werthe von x, von dx und von $\sqrt{a + bx + x^2}$ als rationale Funktionen einer neuen Veränderlichen z erhalten wollen, so nehmen wir an

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z + x \text{ *)} \ldots\ldots (37);$$

denn wird zum Quadrat erhoben, so heben sich die Glieder x^2 wechselseitig auf, und es bleibt nur noch eine Gleichung vom ersten Grade zwischen x und z, woraus man leicht die Werthe von x und dx als rationale Funktionen von z ableiten kann. Wird also die Gleichung (37) zum Quadrat erhoben, und das gemeinschaftliche Glied x^2 unterdrückt, so erhält man:

$$a + bx = 2xz + z^2 \ldots (38)$$

hieraus

$$x = \frac{z^2 - a}{b - 2z} \ldots\ldots\ldots (39);$$

vermittelst dieses Werthes wird die Gleichung (37)

$$\sqrt{a + bx + x^2} = \frac{z^2 - a}{b - 2z} + z;$$

oder wenn man unter gleiche Benennung bringt

$$\sqrt{a + bx + x^2} = -\frac{(z^2 - bz + a)}{b - 2z} \ldots (40).$$

*) Man könnte auch die Wurzelgrösse dem Ausdrucke z — x gleich setzen, weil durch Erhebung der beiden Theile zum Quadrate die Glieder x^2 gleichmässig verschwinden.

(Anmerk. d. Verf.)

Nun ist noch übrig, dx durch z zu bestimmen; man differenziire daher die Gleichung (38), so erhält man:

$$bdx = 2xdz + 2zdx + 2zdz,$$

und hieraus

$$(b - 2z)\, dx = 2\,(x + z)\, dz;$$

vergleicht man die Gleichungen (37) und (40) untereinander, so geht daraus hervor:

$$x + z = -\frac{(z^2 - bz + z)}{b - 2z};$$

wird dieser Werth in die vorige Gleichung eingeführt, so geht sie in folgende über:

$$(b - 2z)\, dx = -\frac{2\,(z^2 - bz + a)}{b - 2z}\, dz$$

und daher

$$dx = -\frac{2\,(z^2 - bz + a)}{(b - 2z)^2}\, dz \;.\;.\;.\;.\;.\; (41).$$

317) Es sei z. B.

$$\frac{dx}{x\sqrt{A + Bx + Cx^2}};$$

gegeben. Man gebe diesem Ausdrucke folgende Form:

$$\frac{dx}{\sqrt{C} \times x\sqrt{a + bx + x^2}},$$

indem man $\frac{A}{C} = a$, $\frac{B}{C} = b$ setzt. Die Gleichung (41), dividirt durch die Gleichung (40) giebt nach gehöriger Reduction:

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \frac{2dz}{b - 2z};$$

wird durch die Gleichung (39) dividirt, so erhält man:

$$\frac{dx}{x\sqrt{a + bx + x^2}} = \frac{2dz}{z^2 - a};$$

werden die Nenner durch $\sqrt{C}$ multiplicirt, so giebt die vorige Gleichung:

$$\frac{dx}{x\sqrt{C}\sqrt{a+bx+x^2}} \text{ oder } \frac{dx}{x\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$$
$$= \frac{2dz}{(z^2-a)\sqrt{C}},$$

welcher Bruch sich wie die rationalen Brüche integriren lässt, indem man nämlich $\sqrt{C}$ als eine gewöhnliche Constante betrachtet.

318) Ein zweites Beispiel sei $dx\sqrt{m^2+x^2}$. Vergleicht man die Wurzelgrösse mit jener in der Formel (40), so hat man $a = m$, $b = o$; werden diese Werthe in die Gleichung (40) und (41) eingeführt, so erhält man:

$$\sqrt{m^2+x^2} = \frac{z^2+m^2}{2z}; \; dx = -\frac{(z^2+m^2)}{2z^2}dz;$$

daher

$$dx\sqrt{m^2+x^2} = -\frac{(z^2+m^2)}{2z^2}dz.$$

Nach geschener Integration dieses Ausdrucks restituire man den Werth von z in x ausgedrückt.

319) Die eben gezeigte Methode lässt sich nicht mehr anwenden, wenn Cx^2 negativ ist; denn würde man wie vorhin verfahren, so wäre

$$\sqrt{A+Bx-Cx^2} = \sqrt{C}\sqrt{\frac{A}{C}+\frac{B}{C}x-x^2}$$
$$= \sqrt{C}\sqrt{a+bx-x^2}.$$

Setzte man nun $\sqrt{a+bx-x^2} = x+z$, und erhöbe auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens zum Quadrate, so verschwände der Ausdruck x^2 nicht, und alsdann wäre der Werth von x in z ausgedrückt eine irrationale Grösse. Zur Behandlung dieses Falles wollen

wir vorläufig bemerken, dass das Polynomium $a + bx - x^2$ immer in reelle Faktoren des ersten Grades zerlegt werden könne *).

Es seien α und α' die Wurzeln der Gleichungen $x^2 - bx - a = 0$; alsdann hat man vermöge der Natur der Gleichungen

$$x^2 - bx - a = (x - \alpha)(x - \alpha');$$

und folglich durch Verwechslung der Zeichen:

$$a + bx - x^2 = -(x - \alpha)(x - \alpha') = (x - \alpha)(\alpha' - x).$$

Substituirt man diesen Werth für die Wurzelgrösse, und nimmt an, dass

$$\sqrt{(x - \alpha)(\alpha' - x)} = (x - \alpha)\, z \;.\;.\;.\;.\; (42);$$

so giebt diese Gleichung, zum Quadrat erhoben

$$(x - \alpha)(\alpha' - x) = (x - \alpha)^2 z^2;$$

durch Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors $x - \alpha$ hat man

$$\alpha' - x = (x - \alpha)\, z^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (43)$$

hieraus leitet man ab:

$$x = \frac{\alpha' + \alpha z^2}{z^2 + 1};$$

*) Um dieses zu beweisen, wollen wir dem Polynomium folgende Form geben:

$$-(x^2 - bx - a),$$

woraus man den Faktor $x^2 - bx - a$ erhält, wenn er gleich Null gesetzt wird, alsdann ist

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + a},$$

mithin nach der Natur der Gleichungen

$$x^2 - bx - a = \left(x - \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + a}\right)\left(x - \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + a}\right);$$

da nach der Voraussetzung a eine positive Grösse bezeichnet, so können die Faktoren, woraus dieses Produkt besteht, nicht imaginär sein. Uebrigens kann man, ohne die Gleichung $x^2 - bx - a = 0$ aufzulösen, schliessen, dass ihre Wurzeln, nach dem Zeichen des letzten Gliedes zu urtheilen, Art. 304, reell sind. (Anmerk. d. Verf.)

daher

$$x - a = \frac{a' + az^2}{z^2 + 1} - a,$$

und wird unter gleiche Benennung gebracht

$$x - a = \frac{a' - a}{z^2 + 1} \ldots\ldots (44);$$

wird nun dieser Werth in das zweite Glied der Gleichung (42) gesetzt, so ist

$$\sqrt{(x - a)(a' - x)} = \frac{a' - a}{z^2 + 1} z \ldots (45).$$

Um den Werth von dx in z ausgedrückt zu erhalten, ist hinreichend die Gleichung (44) zu differenziiren, nämlich:

$$dx = - \frac{2(a' - a)}{(z^2 + 1)^2} zdz \ldots\ldots (46).$$

320) Machen wir nun von diesem Verfahren Anwendung auf das Beispiel

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}}.$$

Dividiren wir die Gleichung (46) durch (45), so erhalten wir:

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = - \frac{2(a' - a)z}{(z^2 + 1)^2 z \frac{(a' - a)}{z^2 + 1}} dz$$

$$= - \frac{2dz}{z^2 + 1};$$

mithin

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = -2 \text{ Bog. } (\text{Tang.} = z) + C;$$

oder für z seinen Werth aus der Gleichung (42) gesetzt,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = C - 2 \text{ Bog.} \left(\text{Tang.} = \frac{\sqrt{(x - a)(a' - x)}}{x - a} \right)$$

$$= C - 2 \text{ Bog.} \left(\text{Tang.} = \sqrt{\frac{a' - x}{x - a}} \right).$$

321) Es sei ferner $dx\sqrt{2ax - x^2}$. Wird das Radical mit jenem der Gleichung (42) verglichen, so hat man $\alpha = o$, $\alpha' = 2a$; wodurch die Gleichungen (45) und (46) werden:

$$\sqrt{x(2a-x)} = \frac{2az}{z^2+1};\ dx = -\frac{4az}{(z^2+1)^2}dz;$$

werden diese Gleichungen durcheinander vervielfacht, so ist das Resultat

$$dx\sqrt{2ax - x^2} = -\frac{8a^2z^2dz}{(z^2+1)^3},$$

welcher Ausdruck sich nach der Methode für die rationalen Brüche integriren lässt.

Von der Integration binomischer Differenziale.

322) Wir haben uns oben eines sehr fruchtbaren Mittels bedient, solche Funktionen zu integriren, welche Wurzelgrössen enthalten, nämlich die Umformung dieser Funktionen in andere rationalen, um hierbei von der Methode für rationale Brüche Gebrauch machen zu können.

Die einzige Schwierigkeit ist die Auffindung der Umformung, welche für jeden Fall giltig sein kann. Wir haben schon eine Art des Umformens angezeigt, wenn die Wurzelgrössen nur dreitheilig sind, und die Veränderliche den zweiten Grad nicht übersteigt. Da dergleichen Ausdrücke sehr häufig in der Analysis vorkommen, so war es nützlich, eine Methode des Umformens, vermöge welcher sie rational werden, zu geben. Auch haben wir ein allgemeines Verfahren gelehrt, diejenigen Fnnktionen rational zu machen, die nur eintheilig, und derer Potenzexponenten Brüche sind. Wir wollen nun untersuchen, ob man mit Hilfe einer Transformation binomische Ausdrücke rational machen könne, welche gebrochene Exponenten haben.

323) Die allgemeine Formel binomischer Ausdrücke ist:

$$x^{m-1}(a+bx^n)^p\, dx \;*).$$

Ist p eine ganze Zahl, so geschieht die Integration dieser Formel nach Art. 269; ist p aber einem Bruche $\frac{p}{q}$ gleich, so hat man

$$x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\, dx \;.\;.\;.\;.\; (47).$$

Um diesen Ausdruck rational zu machen, setze man:

$$a+bx^n = z^q \;.\;.\;.\;.\;.\; (48),$$

oder was dasselbe ist

$$(a+bx^n)^{\frac{1}{q}} = z,$$

folglich

$$(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = z^p \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (49).$$

Wird die Gleichung (48) differenziirt, so giebt sie

$$bnx^{n-1}dx = qz^{q-1}\, dz \;.\;.\;.\;.\;.\; (50).$$

*) Der binomische Ausdruck $Ax^r + Bx^s$ ist ein besonderer Fall von diesem $(Ax^r + Bx^s)^p$; auf diesen letztern Ausdruck werden wir die binomischen Differenziale beziehen. Man kann ihm auch folgende Form geben:

$$[x^r(A+Bx^{s-r})]^p = x^{rp}(A+Bx^{s-r})^p,$$

nnd setzt man $s - r = n$, $rp = m - 1$, so wird er

$$x^{m-1}(A+Bx^n)^p.$$

Man hat hier vorgezogen, lieber rp durch m — 1 als durch m zu ersetzen, weil in diesem Falle die Bedingung der Integrabilität leichter zu bestimmen ist, wie wir nachher sehen werden.

(Anmerk. d. Verf).

Wird dieselbe Gleichung (48) hinsichtlich x aufgelöst, so hat man

$$x = \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}};$$

und daher, wenn auf beiden Seiten zur Potenz m erhoben wird

$$x^m = \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}};$$

wird differenziirt, die Constanten vor das Einschliessungszeichen gesetzt, und durch m dividirt, so findet man

$$x^{m-1}\,dx = \frac{q}{nb}\left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} z^{q-1}dz;$$

wird dieser Werth und der für $(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$ aus der Gleichung (49) in die Gleichung (47) eingeführt, so erhält man:

$$\frac{q}{nb}\left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} z^{q+p-1}\,dz \;\ldots\ldots\; (51),$$

welcher Ausdruck rational ist, wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze positive Zahl ist; denn alsdann ist $\frac{z^q - a}{q}$ zu einer Potenz erhoben, deren Exponent eine ganze Zahl ist, und der Ausdruck (51) lässt sich in eine bestimmte Anzahl eintheiliger zerlegen, wovon jeder durch Art. 262 oder Art. 268, integrirt werden kann. Ist $\frac{m}{n}$ eine ganze negative Zahl, so wird der Ausdruck (51) auch rational, und lässt sich mithin nach der Methode für die rationalen Brüche integriren.

324) Es sei z. B. der Ausdruck

$$x^5 (a + bx^2)^{2/3} dx$$

gegeben. Hier hat man

$$p = 2,\ q = 3,\ m - 1 = 5, \text{ oder } m = 6,\ n = 2,$$

mithin wird der Bedingung der Integrabilität Genüge geleistet. Werden diese Werthe in den Ausdruck (51) eingeführt, so hat man

$$\frac{3}{2b^3}(z^3 - a)^2 z^4 dz = \frac{3z^{10}}{2b^3} dz - \frac{3a}{b^3} z^7 dz + \frac{3a^2}{2b^3} z^4 dz$$

zu integriren; daher

$$\int x^5 (a + bx^2)^{2/3} dx = \frac{3z^{11}}{22b^3} - \frac{3az^8}{8b^3} + \frac{3a^2 z^5}{10b^3} + C,$$

man restituire hierauf in diesem Resultate den Werth von z in x.

325) Um noch zu einer andern Bedingung der Integrabilität zu gelangen, schreibe man den Ausdruck (47) auf folgende Art:

$$x^{m-1}\left[\left(\frac{a}{x^n} + b\right) x^n\right]^{\frac{p}{q}} dx;$$

erhebt man die Faktoren des Produkts $\left(\frac{a}{x^n} + b\right) x^n$ zur Dignität $\frac{p}{q}$, so erhält man:

$$x^{m-1} x^{\frac{np}{q}} \left(\frac{a}{x^n} + b\right)^{\frac{p}{q}} = x^{m + \frac{np}{q} - 1} (ax^{-n} + b)^{\frac{p}{q}} dx.$$

Damit aber diese Grösse integrabel sei, so muss nach dem vorigen Beweise

$$\frac{m + \frac{np}{q}}{n} = \textit{einer ganzen Zahl},$$

oder wenn die angezeigte Division wirklich verrichtet wird,

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \textit{einer ganzen Zahl.}$$

326) Es sei z. B. der Ausdruck $x^4 dx \sqrt[3]{a + bx^3}$ gegeben. Wird er unter folgende Form dargestellt:

$$x^{5-1} (a + bx^3)^{1/3} dx;$$

so ist

$$m = 5, n = 3, p = 1, q = 3;$$

folglich

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = 5/3 + 1/3 = 2,$$

mithin ist diese Grösse integrirbar; denn in diesem Falle hat man

$$x^{5-1} (a + bx^3)^{1/3} dx = x^{5-1} \left(\frac{a}{x^3} + b\right)^{1/3} x dx;$$

wird auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens wirklich x^{5-1} durch x vervielfacht, so verwandelt sich dieser Ausdruck in folgenden:

$$x^5 (ax^{-3} + b)^{1/3} dx \; . \; . \; . \; . \; . \; (52).$$

Man mache $ax^{-3} + b = z^3$; so findet man:

$$(ax^{-3} + b)^{1/3} = z; \; x^{-3} = \frac{z^3 - b}{a},$$

oder

$$\left(\frac{a}{x^3} + b\right)^{1/3} = z; \; \frac{1}{x^3} = \frac{z^3 - b}{a};$$

der letztere unter diesen Ausdrücken giebt

$$x^3 = \frac{a}{z^3 - b},$$

und dieser durch Differenziation

$$x^2 dx = -\frac{az^2 dz}{(z^3 - b)^2};$$

werden die beiden letztern Gleichungen durcheinander vervielfacht, so hat man:

$$x^5 dx = -\frac{a^2 z^2 dz}{(z^3 - b)^3}.$$

Wenn dieser Werth, und jener von $(ax^{-3} + b)^{1/3}$ in den Ausdruck (52) substituirt werden, so ergiebt sich zuletzt:

$$x^5 (ax^{-3} + b)^{1/3} dx = -\frac{a^2 z^2 dz}{(z^3 - b)^3},$$

welcher Ausdruck mit Hilfe der Methode für die rationalen Brüche integrirt werden kann.

Von den Reduktionsformeln der binomischen Differenziale.

327) Wenn die Gleichung $x^{m-1} dx (a + bx^n)^p$ den so eben vorgeschriebenen Bedingungen der Integrabilität nicht Genüge leistet, so kann man hiebei die Integration durch Theile auf folgende Art gebrauchen.

Man vergleiche die Formel

$$\int x^{m-1} dx\ (a + bx^n)^p$$

mit dem ersten Theile der Gleichnng

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

indem man annimmt, dass

$$(a + bx^n)^p = u;\ x^{m-1} dx = dv,$$

mithin $v = \frac{x^m}{m}$; und man hat durch Vorsetzung der beständigen Grössen vor das Integrationszeichen:

$$\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^p = (a + bx^n)^p \times \frac{x^m}{m} - \frac{pnb}{m}$$
$$\int x^m (a + bx^n)^{p-1} x^{n-1} dx,$$

oder wenn man die Exponenten von x vereinigt,

$$\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^p = (a + bx^n)^p$$
$$\times \frac{x^m}{m} - \frac{pnb}{m} \int x^{m+n-1} (a + bx^n)^{p-1} dx \ldots (53);$$

auf der andern Seite hat man die identische Gleichung:

$$(a + bx^n)^p = a(a + bx^n)^{p-1} + bx^n(a + bx^n)^{p-1}$$

multiplicirt man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens durch $x^{m-1}dx$, so geht hervor:

$$\int x^{m-1}dx(a + bx^n)^p = a\int x^{m-1}dx(a + bx^n)^{p-1}$$
$$+ b\int x^{m+n-1}dx(a + bx^n)^{p-1} \ldots (54).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man das letzte Glied der Gleichung (53) eliminiren, wenn man nämlich die Gleichung (54) durch $\frac{pn}{m}$ vervielfacht, und sie zu (53) zählt; hiedurch erhält man:

$$\left(1 + \frac{pn}{m}\right)\int x^{m-1}dx(a + bx^n)_p = (a + bx^n)^p \times \frac{x^m}{m}$$
$$+ \frac{pna}{m}\int x^{m+n-1}dx(a + bx^n)^{p-1};$$

multiplicirt man durch m, und dividirt nachher durch den constanten Faktor des ersten Theiles der Gleichung, so ist:

$$\int x^{m-1}dx(a + bx^n)^p = \frac{x^m}{(m + pn)}(a + bx^n)^p$$
$$+ \frac{pna}{m + pn}\int x^{m-1}dx(a + bx^n)^{p-1} \ldots (55).$$

Vermittelst dieser Formel kann man auch das Integral des Ausdrucks $x^{m-1}dx(a + bx^n)^{p-1}$ von einem andern abhängen lassen, in welchem der Exponent der Grössen zwischen den Klammern um *eins* geringer ist.

Wird in dieser Formel p — 1 für p geschrieben, so hängt das Integral dieses Ausdrucks $x^{m-1}dx(a + bx^n)^{p-1}$ vom Integral des Ausdrucks $x^{m-1}dx(a + bx^n)^{p-2}$ ab; durch ein analoges Verfahren dieses wiederum von dem Integral des Ausdrucks $x^{m-1}dx(a + bx^n)^{p-3}$; u. s. w. dass also der Exponent der eingeklammerten Grösse nach und nach p, p — 1, p — 2, p — 3 p — n, sein wird. (Durch n wollen wir die grösste ganze Zahl bezeichnen,

welche in q, als eine gebrochene Zahl betrachtet, enthalten ist.) Wenn man das Integral von $x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-n}$ zu finden weiss, so ist es nicht schwer, jenes von $a+bx^n$ zu erlalten, dessen Exponent um eine Einheit grösser ist, u. s. w., bis dass man endlich zum Integral von $x^{m-1} dx (a+bx^n)^p$ in einer bestimmten Anzahl algebraischer Ausdrücke gelangt.

327) Wenn p negativ wäre, so gäbe die Gleichung (55) folgende:

$$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-1} = \frac{-x^m (a+bx^n)^p + (m+pn)\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p}{pna};$$

p für p — 1 gesetzt führt zu

$$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{-x^m(a+bx^n)^{p+1} + [m+(p+1)n]\int x^{m-1} dx(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1) na} . (56);$$

wenn nun in dieser Formel p negativ gesetzt wird, so hängt das vorgelegte Integral von einem andern ab, worin der Exponent der eingeklammerten Grösse dem Null näher als der Einheit sein wird.

328) Man kann auch den Exponenten von x ausserhalb der Klammer vermindern. Zu diesem Ende setze man die Theile zur Rechten des Gleichheitszeichens der Gleichungen (53) und (54) unter sich gleich, welches geschehen kann, indem die ersten Theile genannter Gleichungen unter sich gleich sind, alsdann hat man:

$$(a+bx^n)^p \times \frac{x^m}{m} - \frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1} (a+bx^n)^{p-1} dx$$

$$= a\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-1} + b\int x^{m+n-1} dx (a+bx^n)^{p-1},$$

hieraus

$$\left(b+\frac{pnb}{m}\right)\int x^{m+n-1} dx (a+bx^n)^{p-1} = (a+bx^n)^p \times \frac{x^m}{m}$$

$$- a\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-1},$$

folglich:

$$\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}dx$$

$$=\frac{(a+bx^n)^p \times x^m - ma\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{p-1}}{b\,(m+pn)};$$

wird m für m + n, p für p — 1 gesetzt; so verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^p$$

$$=\frac{(a+bx^n)^{p+1}x^{m-n}-(m-n)\,a\int x^{m-n-1}dx\,(a+bx^n)^p}{b\,(m+pn)} \quad (57).$$

Vermittelst dieser Formel wird das Integral von einem andern abhängig, in welchem der Theil x^{m-1}, der ausserhalb der Klammern sich befindet, in x^{m-n-1} übergeht. Dieses zweitere Integral hängt wiederum wie das vorige von einem dritteren ab, in welchem der ausserhalb den Klammern sich befindliche Theil zum Exponenten die Zahl m — 2n — 1 haben wird; fährt man so fort, so erhalt man nach und nach zu Exponenten des x ausser den Klammern m — 1, m — n — 1, m — 2n — 1, m — 3n — 1, . . . m — rn — 1. (Unter r verstehen wir das grösste in m enthaltene Vielfache).

Bei der letzten Op ration wird der Exponent des x vor der Klammer im zweiten Theile der Reduktionsgleichung m — rn — 1 sein, folglich wird x im ersten Theile derselben Gleichung m — (r — 1) n — 1 zum Exponenten haben. Setzt man daher m statt m — (r — 1) n in die Formel (57), und bezeichnet den integrirten Theil durch X, so ergiebt sich folgende Formel:

$$\int x^{m-(r-1)n-1}dx\,(a+bx^n)^p$$

$$=\frac{X-(m-rn)\,a\int x^{m-rn-1}dx\,(a+bx^n)^p}{b\,[m-(r-1)\,n+pn]} \quad \ldots\ldots (58).$$

Wenn rn = m, so ist der Coëfficient m — rn = o, wodurch das Glied des zweiten Theils dieser Gleichung, welches mit dem Integrationszeichen behaftet ist, verschwindet, und es bleibt nur noch:

$$\int x^{m-(r-1)n-1}dx\,(a+bx^n)^p = \frac{X}{bn\,(1+p)}.$$

Ist dieses Integral genau bestimmt, so sind es auch alle andern der Reihe nach, und alsdann die gegebene Formel integrabel.

329) Wir haben angenommen, dass m in der Formel (57), in welcher der Exponent ausserhalb der Klammer abnimmt, positiv sei. Wollte man nun eine Formel haben, in welcher m negativ wäie, so könnte man sie aus der Formel (57) also ableiten:

$$\int x^{m-n-1} dx \left(a + bx^n\right)^p$$
$$= \frac{\left(a+bx^n\right)^{p+1} x^{m-n} - b(m+np)\int x^{m-1} dx \left(a+bx^n\right)^p}{(m - n)\, a};$$

setzt man m statt m — n, so ist

$$\int x^{m-1} dx \left(a + bx^n\right)^p$$
$$= \frac{\left(a+bx^n\right)^{p-1} x^m - b(m+n+np)\int x^{m+n-1} dx \left(a+bx^n\right)^p}{ma} \quad (59).$$

Ist daher der Exponent ausserhalb der Parenthese negativ; so hängt nach dieser Formel das Integral von einem andern ab, in welchem der Werth dieses Exponenten um n Einheiten kleiner ist. Denn ist $m + n - 1$ der Exponent des x ausserhalb der Klammer im zweiten Theile der Gleichung (59), und man schreibt m statt des negativen Werthes, der durch m^1 bezeichnet werden soll, so geht dieser Exponent in folgenden über $-(m^1 - n) - 1$, indess der Exponent von x auf der Linken des Gleichheitszeichens ausserhalb der Parenthese $-m^1 - 1$ sein wird; und wenn man blos den numerischen Werth dieser Exponenten betrachtet, so ist gewiss, dass $-(m^1 - n) - 1$ um n Einheiten grösser als $-m^1 - 1$ sein werde.

330) Um von diesen Formeln eine Anwendung zu machen, sei

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Man gebe diesem Ausdrucke folgende Form: $x^m dx\,(1-x)^{-1/2}$; vergleicht man diesen mit $x^{m-1} dx\,(a+bx^n)^p$, so hat man:

$m-1=m$, oder $m=m+1$, $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $p=-1/2$.

Da der numerische Werth des Exponenten der Parenthese kleiner als die Einheit ist, so suche man den Exponenten von x ausserhalb der Parenthese zu vermindern, welches durch Substitution der obigen Werthe in die Formel (57) erzweckt wird; hiedurch erhält man folgende:

$$\int x^m dx(1-x^2)^{-1/2} = -x^{m-1}\frac{(1-x^2)^{1/2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int x^{m-2} dx(1-x^2)^{-1/2}$$

oder

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \ldots (60).$$

Schreibt man nach und nach

$m-2$, für m

so hat man:

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{m-3}\frac{\sqrt{1-x^2}}{m-2} + \frac{m-3}{m-2}\int \frac{x^{m-4} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$m-4$ für m,

$$\int \frac{x^{m-4} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{m-5}\frac{\sqrt{1-x^2}}{m-4} + \frac{m-5}{m-4}\int \frac{x^{m-6} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$m-6$ für m,

$$\int \frac{x^{m-6} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-7}\sqrt{1-x^2}}{m-6} + \frac{m-7}{m-6}\int \frac{x^{m-8} dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

u. s. w.

Die erste von diesen Gleichungen liefert den Werth von $\int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}}$, welcher in die Formel (60) eingeführt zu folgender führt:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\left[\frac{x^{m-1}}{m} + \frac{m-1}{m} \times \frac{x^{m-3}}{m-2}\right] + \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)} \int \frac{x^{m-4} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

werden hierauf in dieses Resultat nach und nach die Werthe von

$$\int \frac{x^{m-4} dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \int \frac{x^{m-6} dx}{\sqrt{1-x^2}}, \ldots\ldots$$

eingeführt, so hat man für das letzte Integral, wenn n eine ganze gerade Zahl ist,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Bog. (Sin.} = x);$$

wenn m eine ganze ungrade Zahl ist,

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

und da in diesem Falle xdx, nebst einem beständigen Faktor, das Differenzial von x^2 ist, so mache man $1 - x^2 = z$; alsdann hat man:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int -\tfrac{1}{2}\, z^{-\frac{1}{2}} dz$$

$$= -z^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{z} = -\sqrt{1-x^2}.$$

Ist nun das letzte Integral gefunden, so ist offenbar, dass die Formel immer integrirt werden kann, wenn m eine ganze Zahl bedeutet.

331) Es sei ein ferneres Beispiel

$$\frac{dx}{x^m \sqrt{1-x^2}}.$$

Schreibt man diesen Ausdruck auf folgende Weise:

$$x^{-m}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

so lässt er sich, um den Exponenten von x ausserhalb der Parenthese zu vermindern, mit der Formel (59) vergleichen, da dann

$$m-1 = -m;\ a = 1;\ b = -1;\ n = 2;\ p = -\tfrac{1}{2};$$

durch diese Werthe wird die Formel (59) in folgende verwandelt:

$$\int x^{-m} dx (1-x^2)^{-1/2}$$

$$= \frac{(1-x^2)^{1/2}}{1-m} x^{1-m} + \frac{(2-m)}{1-m} \int x^{-m+2} dx (1-x^2)^{-1/2},$$

oder vielmehr

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}} \dots (61).$$

Wenn m eine gerade Zahl, z. B. 8, ist, so hängt das Integral von $\frac{dx}{x^8 \sqrt{1-x^2}}$ von jenem der Formel $\frac{dx}{x^6 \sqrt{1-x^2}}$ ab, dieses wiederum vermöge derselben Formel von dem Integral der Formel $\frac{dx}{x^4 \sqrt{1-x^2}}$, bis $m = 2$, da dann die Formel (61) zu

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

führt, so dass durch wiederholte Substitution das Integral für ein gerades m erhalten wird.

Wenn nun m ungerade, z. B. 7, ist, und man in der Formel (61) nach und nach, 7, 5, 3 für m schreibt, so kann man bei $m = 1$ nicht aufhören, denn unter dieser Voraussetzung würde der Coëfficient des zweiten Integrals $-\frac{1}{0} = -\infty$; der kleinste Werth, den m annehmen kann, ist daher 3, da dann die Formel (61) folgenden Werth giebt:

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + 1/2 \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}.$$

Um den Ausdruck $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ zu integriren, setze man $x = \frac{1}{z}$, alsdann ist

$$dx = -\frac{dz}{z^2}; \text{ und } \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{z^2-1}}{z},$$

folglich

$$\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}.$$

Nach Art. 288 ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{Log.}\,(x + \sqrt{x^2-1});$$

mithin, wenn x in z verwandelt wird,

$$\int - \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = -\text{Log.}\,(z + \sqrt{z^2-1}),$$

und nun wieder $\frac{1}{x}$ für z

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} =$$

$$-\text{Log.}\left[\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right] + C = -\text{Log.}\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + C.$$

Hieraus erhellet, dass die Formel $\frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}}$ integrirt werden kann, m mag gerade oder ungerade sein.

Von der Integration jener Grössen, welche Sinusse und Cosinusse enthalten.

332) Die Integration der Grössen, welche Sinusse und Cosinusse enthalten, hängt von der Möglichkeit ab, Cos.^2x, Cos.^3x, Cos.^4, ... als Funktion der Ausdrücke Cos.x, Cos.2x, Cos.3x, ... zu entwickeln. Es soll nun vorläufig gezeigt werden, wie man schon durch die Trigonometrie dazu gelangen könne.

Wenn in der Formel

$$\text{Cos.}(a+b) = \text{Cos.}\,a\,\text{Cos}\,b - \text{Sin.}\,a\,\text{Sin.}\,b \ldots (62)$$

$a = b$ gesetzt wird; so hat man:

$$\text{Cos.}2a = \text{Cos.}^2a - \text{Sin.}^2a = \text{Cos.}^2a - (1 - \text{Cos.}^2a)$$
$$= 2\,\text{Cos.}^2a - 1,$$

und daher

$$\text{Cos.}^2a = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{Cos.}2a.$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch Cos.a, so ergiebt sich

$$\text{Cos.}^3a = \tfrac{1}{2}\,\text{Cos.}a + \tfrac{1}{2}\,\text{Cos.}a\,\text{Cos.}2a \ldots (63).$$

Wird zur Gleichung (62) folgende addirt,

$$\text{Cos.}(b-a) = \text{Cos.}\,a\,\text{Cos.}\,b + \text{Sin.}\,a\,\text{Sin.}\,b,$$

so hat man

$$\text{Cos.}\,a\,\text{Cos.}\,b = \tfrac{1}{2}\,\text{Cos.}(a+b) + \tfrac{1}{2}\,\text{Cos.}(b-a).$$

Macht man $b = 2a$, so ist

$$\text{Cos.}\,a\,\text{Cos.}\,2a = \tfrac{1}{2}\,\text{Cos.}\,3a + \tfrac{1}{2}\,\text{Cos.}\,a;$$

wird Cos. a Cos. 2a vermittelst dieser und der Gleichung (63) eliminirt, so findet man:

$$\text{Cos.}^3a = \tfrac{3}{4}\,\text{Cos.}\,a + \tfrac{1}{4}\,\text{Cos.}\,3a.$$

Nach demselben Verfahren könnte man die höheren Potenzen von Cos. a berechnen *).

*) Das Vollständigste, was wir über die Entwicklung der Kreisfunktionen in Reihen besitzen, verdanken wir dem unermüdeten Streben des würdigen und sehr gelehrten Herrn Hofraths *Schweins* in Heidelberg: *Geometrie nach einem neuen Plane bearbeitet, aus den Schriften der Alten und Neuen gesammelt und mit neuen Sätzen vermehrt von Ferdinand Schweins. Göttingen im Verlag bei Vardenhök und Ruprecht* 1808. Für den gegenwärtigen Fall vergleiche man tom. II. pag. 268. §. 70. Da dieses schätzbare Werk vielleicht einem oder dem andern meiner Leser mangeln könnte, so will ich hier Hr. Schweins Verfahren mittheilen.

Ee ist

$$\text{Cos.}^2a = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{Cos.}\,a$$
$$\text{Cos.}^3a = \tfrac{3}{4}\,\text{Cos.}a + \tfrac{1}{4}\,\text{Cos.}\,3a$$
$$\text{Cos.}^4a = \tfrac{1}{8}(3 + 4\,\text{Cos.}\,2a + \text{Cos.}\,4a)$$
$$\text{Cos.}^5a = \tfrac{1}{16}(10\,\text{Cos.}a + 5\,\text{Cos.}\,3a + \text{Cos.}\,5a)$$
$$\text{Cos.}^6a = \tfrac{1}{32}(10 + 15\,\text{Cos.}2a + 6\,\text{Cos.}4a + \text{Cos.}6a)$$
$$\text{Cos.}^7a = \tfrac{1}{64}(35\,\text{Cos.}a + 21\,\text{Cos.}3a + 7\,\text{Cos.}5a + \text{Cos.}7a)$$
$$\text{Cos.}^8a = \tfrac{1}{128}(35 + 56\,\text{Cos.}\,a + 28\,\text{Cos.}\,4a + 8\,\text{Cos.}6a + \text{Cos.}8a)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

333) Hat man nun den Ausdruck $\text{Cos.}^m x dx$, wo m eine ganze Zahl ist, zu integriren, so setze man statt $\text{Cos.}^m x$ seine in der Anmerkung gefundene Reihe, die nur folgende Glieder enthalten kann.

Constante, Cos. x, Cos. 2x, Cos. 3x so dass das ganze Geschäft der Integration sich darauf beschränkt, einen Ausdruck Cos. mxdx integriren zu können.

Bemerkt man desshalb, dass wenn in der Gleichung

$$d\,\text{Sin. } z = \text{Cos. } zdz,$$

mx = z gesetzt wird, man folgende Gleichung habe:

$$d\,\text{Sin. } mx = \text{Cos. } mx\, mdx;$$

daher

$$\int \text{Cos. } mxdx = \frac{\text{Sin. } mx}{m}.$$

Der Coëfficient des letzten Gliedes ist 1; des vorletzten m; des vorvorletzten vom Ende an gerechnet

des vorvorletzten	des vierten	des fünften
$3 = \frac{4 . 3}{1 . 2 . 2}$	$10 = \frac{6 . 5 . 4}{1 . 2 . 3 . 2}$	$35 = \frac{8 . 7 . 6 . 5}{1 . 2 . 3 . 4 . 2}$
$10 = \frac{5 . 4}{1 . 2}$	$35 = \frac{7 . 6 . 5}{1 . 2 . 3}$	.
. . .	$56 = \frac{8 . 7 . 6}{1 . 2 . 3}$	.
$\frac{m(m-1)}{1 . 2}$	. . .	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 . 2 . 3 . 4}$
	$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3}$	

Wird die Ordnung der Glieder umgekehrt, so hat man

$$\text{Cos.}^m a = \frac{1}{2^{m-1}} \Big[\text{Cos. } ma + \frac{m}{1} \text{Cos.}(m-2)a + \frac{m(m-1)}{1 . 2} \text{Cos}(m-4)a$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} \text{Cos.}(m-6)a + \ldots\ldots$$

(und für das letzte Glied, wenn m gerade ist)

$$+ \tfrac{1}{2} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-(\tfrac{1}{2}m-1))}{1 . 2 . 3 \ldots . \tfrac{1}{2} n} \text{Cos.}(m-m)a$$

(und für ein ungrades m)

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-\tfrac{1}{2}(m-2)}{1 . 2 . 3 \ldots . \tfrac{1}{2}(n-1)} \text{Cos.}(m-(m-1))a \Big].$$

(Anmerk. d. Uebers.)

Auf ähnliche Weise fände man

$$\int \text{Sin. } mx dx = - \frac{\text{Cos. } mx}{m}.$$

Es sei z. B. Cos. ^2x dx gegeben. wird für Cos. ^2x sein Werth $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ Cos. 2x geschrieben, so hat man

$$\int \text{Cos.}^2 x dx = \int (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \text{Cos.} 2x) dx = \frac{x}{2} + \tfrac{1}{4} \text{ Sin. } 2x + C.$$

334) Wollte man $\text{Sin.}^m x\, dx$ integriren, so würde man auf ähnliche Weise verfahren; oder anders, indem man durch z den Complementsbogen von x bezeichnete; da dann

$$x = \tfrac{1}{2}\pi - z;\ dx = -dz,\ \text{Sin. } x = \text{Cos. } z;$$

man dürfte daher nur die Formel $\text{Sin.}^m x dx$ in $- \text{Cos.}^m z dz$ verwandeln und wie oben integriren.

335) Wir wollen den allgemeinsten Fall $\text{Sin.}^m x d^x$ $\text{Cos.}^n x dx$ vornehmen. Ist m gerade, so sei $m = 2m'$; alsdann hat man:

$$\text{Sin.}^{2m'} \text{Cos.}^n x dx = (1 - \text{Cos.}^2 x)^{m'} \text{Cos.}^n dx$$

zu integriren.

Wird $(1 - \text{Cos.}^2 x)^{m'}$ in eine Reihe entwickelt, und durch $\text{Cos.}^n x dx$ multiplicirt, so erhält man lauter Glieder von der Form $\text{Cos.}^k x dx$, welche nach obiger Weise integrirt werden können.

Ist m ungerade, so mache man $m = 2m' + 1$, und man hat

$$\text{Sin.}^m x \text{ Cos.}^n x dx = \text{Sin.}^{2m'} x \text{ Cos.}^n x \text{ Sin. } x dx$$

$$= (1 - \text{Cos.}^2 x)^{m'} \text{Cos.}^n x \times - d \text{ Cos. } x;$$

setzt man Cos. x = z, so verwandelt sich dieser Ausdruck in folgenden:

$$-(1 - z^2)^{m'} z^n dz;$$

da nach der Voraussetzung m′ und n ganze Zahlen sind, so entwickle man erst, und integrire hierauf.

336) Will man dieses Verfahren auf die Ausdrücke

$$\frac{\text{Cos.}^m x dx}{\text{Sin.}^n x}, \quad \frac{\text{Sin.}\, x^n dx}{\text{Cos.}^m x}$$

anwenden; so bemerke man, dass der zweitere in den erstern übergeht, wenn man $x = \frac{\pi}{2} - z$ setzt; man hat daher nur nöthig den erstern jener Ausdrücke zu betrachten. Ist m eine gerade Zahl, so wollen wir $m = 2m'$ annehmen; alsdann ist:

$$\frac{\text{Cos.}^m x dx}{\text{Sin.}^n x} = \frac{(1 - \text{Sin.}^2 x)^{m'}}{\text{Sin.}^n x}$$

$$= \frac{1 - m' \text{Sin.}^2 x + m' . \frac{m'-1}{2} \text{Sin.}^4 x . + \ldots .}{\text{Sin.}^n x};$$

das Integral dieses Ausdrucks hängt von den Integralen des $\text{Sin.}^l x dx$ und von $\frac{dx}{\text{Sin.}^k x}$ ab.

Da wir im Stande sind, das erstere Integral zu bestimmen, so wollen wir gleich nachher sehen, wie der zweitere Ausdruck sich integriren lasse. Wenn m eine ungrade Zahl bedeutet, so mache man $m = 2m' + 1$; man hat daraus:

$$\frac{\text{Cos.}^m x dx}{\text{Sin.}^n x} = \frac{(1 - \text{Sin.}^2 x)^{m'} \text{Cos.}\, x dx}{\text{Sin.}^n x}$$

$$= (1 - m' \text{Sin.}^2 x + \ldots . .) \frac{\text{Cos.}\, x dx}{\text{Sin.}^n x};$$

das Integral dieses Ausdrucks hängt von jenen der Ausdrücke $\text{Sin.}^l x \, \text{Cos.}\, x dx$ und $\frac{dx \, \text{Cos.}\, x}{\text{Sin.}^k x}$ ab; wegen Integration des erstern vergleiche man Art. 334; was die Integration des zweitern anbelangt, setze man $\text{Sin.}\, x = z$, mithin $dx \, \text{Cos.}\, x = dz$, und folglich

$$\int \frac{dx \, \text{Cos.}\, x}{\text{Sin.}^k x} = \int \frac{dz}{z^k} = \int z^{-k} dz = \frac{z^{-k+1}}{1-k} + C.$$

In Betracht des Integrals von $\frac{dx}{\text{Sin.}^k x}$ wird dieser Ausdruck durch dieselbe Transformation in folgenden $\frac{dz}{z^k \sqrt{1-z}}$ verwandelt, welche Formel man schon zu integriren weiss.

337) Hat man $\frac{dx}{\text{Cos.}^m x \text{ Sin.}^n x}$ zu integriren, so multiplicire man diesen Ausdruck durch $\text{Cos.}^2 x + \text{Sin.}^2 x$, welche Summe der Einheit gleich ist; hieraus erhält man

$$\frac{dx}{\text{Cos.}^m x \text{ Sin.}^n x} = \frac{dx}{\text{Cos.}^{m-2} x \text{ Sin.}^n x} + \frac{dx}{\text{Cos.}^m x \text{ Sin.}^{n-2} x},$$

wodurch man die Summe der Exponenten vermindert. Wiederholt man nun einigemal dieselbe Operation, und setzt man nach und nach alle die Brüche bei Seite, welche in ihren Nennern nur eine einzige Potenz eines Sinus oder Cosinus enthalten (weil alsdann die Funktion nach dem Vorhergehenden integrabel ist), bei der letzten Operation wird man auf Glieder stossen, welche auch noch Potenzen von Sinusen und Cosinusen enthalten oder folgende Form haben können:

$$\frac{dx}{\text{Sin. } x \text{ Cos. } x}, \quad \frac{dx}{\text{Cos. } x}, \quad \frac{dx}{\text{Sin. } x}.$$

Um nun $\frac{dx}{\text{Sin. } x \text{ Cos. } x}$ zu integriren, multiplicire man den Zähler durch $\text{Cos.}^2 x + \text{Sin.}^2 x$, wodurch man

$$\frac{dx}{\text{Sin. } x \text{ Cos. } x} = dx \frac{\text{Cos. } x}{\text{Sin. } x} + dx \frac{\text{Sin. } x}{\text{Cos. } x}$$

$$= \frac{d \text{ Sin. } x}{\text{Sin. } x} - \frac{d \text{ Cos. } x}{\text{Cos. } x}$$

erhält, und das Integral dieses Ausdrucks ist $\text{Log. Sin. } x - \text{Log. Cos. } x + \text{Log. } C = \text{Log. } C \text{ Tang. } x$.

Um $\frac{dx}{\text{Sin.}x}$ zu integriren mache man Cos. x = z, so ist

$$dx = -\frac{dz}{\text{Sin. }x} \text{ und } \frac{dx}{\text{Sin. }x} = -\frac{dz}{\text{Sin.}^2 x} = -\frac{dz}{1-z^2},$$

welche Formel wie rationale Brüche integrirt wird.

Hinsichtlich $\frac{dx}{\text{Cos. }x}$ nehme man Sin. x = z an, und man findet

$$\int \frac{dx}{\text{Cos. }x} = \int \frac{d}{\sqrt{1-z^2}}.$$

338) Man kann im Allgemeinen Ausdrücke, welche Sinusse und Cosinusse enthalten, in andere verwandeln, in welchen nichts dergleichen vorkömmt, wenn man nämlich Sin. x oder Cos. x einer neuen Veränderlichen gleich setzt. Nähme man z. B. in dem Ausdrucke $\text{Sin.}^m x \text{ Cos.}^n x dx$, Sin. x = z an, so hätte man

$$\text{Cos. } x = \sqrt{1-z^2}, \text{ und } dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

wird substituirt, so ergiebt sich

$$\text{Sin.}^m x \text{ Cos.}^n x dx = z^m (1-z^2)^{\frac{n}{2}} (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz$$
$$= z^m (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz,$$

welcher Ausdruck sich auf binomische Differenziale zurückbringen lässt.

Auch könnte man sich bei dem Ausdrucke $\text{Sin.}^m x \text{ Cos.}^n x dx$ der Integration durch Theile bedienen *)

339) Trigonometrische Formeln können auch mit Vortheil in gewissen Fällen angewandt werden; wenn

*) Um ihn mit udv zu vergleichen, zerlege man den Ausdruck in

$$\text{Sin.}^{m-1} x \text{ Cos.}^n x \text{ Sin. } x dx = -\text{Sin.}^{m-1} x . d \frac{1}{n+1} \text{Cos.}^{n+1} x.$$

z. B. Sin. mx Cos. nxdx zu integriren wäre. Die Trigonometrie liefert uns

$$\text{Sin. a Sin. b} = \tfrac{1}{2}\,\text{Sin.}(a+b) + \tfrac{1}{2}\,\text{Sin.}(a-b);$$

vergleicht man hiemit den Ausdruck Sin. mx Cos. nx, so findet man

$$\text{Sin. mx Cos. nxdx} = \tfrac{1}{2}\,\text{Sin.}\,[(m+n)x]\,dx + \tfrac{1}{2}\,\text{Sin.}\,[(m-n)x]\,dx,$$

dessen Integral, nach Art. 333, folgendes ist:

$$C - \tfrac{1}{2}\,\frac{\text{Cos.}\,[(m+n)x]}{m+n} - \tfrac{1}{2}\,\frac{\text{Cos.}\,[(m-n)x]}{m-n}.$$

Von der Integration der Exponential- und logarithmischen Grössen.

340) Nach dem, was in Art. 37 bewiesen wurde, ist $da^x = a^x dx\,\text{Log. a}$, wo natürliche Logarithmen verstanden werden müssen, daher auch umgekehrt

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\text{Log. a}}$$

Dieses Integral kann uns nun dienen, den allgemeinen Ausdruck $a^x Xdx$ zu integriren, worin X eine Funktion von x ist. Zu diesem Entzwecke wollen wir dem Ausdrucke folgende Form geben: $X . a^x dx$, und theilweise integriren; wir erhalten:

$$\int X . a^x dx = \frac{Xa^x}{\text{Log. a}} - \int \frac{a^x}{\text{Log. a}}\,dX \ldots (64).$$

Wird nun die Funktion X nach und nach differenzirt, so ergiebt sich $dX = X'dx$; $dX' = X''dx \ldots$; mithin

$$\int \frac{a^x}{\text{Log.a}}\,dX \text{ oder} \int \frac{X'}{\text{Log.a}} . a^x dx$$

$$= \frac{X'}{(\text{Log.a})^2}\,a^x - \int \frac{a^x}{(\text{Log.a})^2}\,dX';$$

durch Substitution dieses Werthes statt des letzten Gliedes der Gleichung (64), hat man:

$$\int Xa^x dx = \frac{Xa^x}{Log.\ a} - \frac{X'.a^x}{(Log.a)^2} + \int \frac{a^x}{(Log.a)^2} dX';$$

fährt man fort auf diese Art zu operiren, so kömmt man zuletzt zu einer Reihe von folgender Form:

$$\int Xa^x dx = a^x \left(\frac{X}{Log.a} - \frac{X'}{(Log.a)^2} + \frac{X''}{(Log.a)^3} - \frac{X'''}{(Log.\ a)^4} \right.$$

$$\left. \ldots\ldots \pm \frac{X^{(n)}}{(Log.\ a)^{n+1}} \right) \mp \int \frac{a^x\, dX^{(n)}}{(Log.\ a)^{n+1}}.$$

Ist in der Reihe der Differenzial-Coëfficienten X', X'', X''', ... $X^{(n)}$ der letzte Coëfficient constant, so hat man $dX^{(n)} = o$, in welchem Falle dann auch der Theil der Reihe verschwindet, welcher mit dem Integrationszeichen behaftet ist.

341) Es sei z. B. $X = x^3$; hieraus wird

$$X' = 3x^2;\ X'' = 2.3x;\ X''' \text{ oder } X^{(n)} = 3.2$$

abgeleitet; folglich

$$\int x^3 a^x dx = a^x \left(\frac{x^3}{Log.a} - \frac{3x^2}{(Log.a)^2} + \frac{2.3x}{(Log.a)^3} - \frac{2.3}{(Log.a)^4} \right).$$

Setzt man a gleich der Zahl e, Grundzahl des Systems der natürlichen Logarithmen, so wird $Log.a = Log.e$; nun aber $Log.\ e = 1$ vermöge der Gleichung $e = e^{Log.\ e}$; folglich

$$\int x^3 e^x dx = e^x (x^3 - 3x^2 + 2.3x - 2.3).$$

342) Man kann auch noch auf eine andere Art $\int a^x Xdx$ entwickeln. Macht man nämlich $\int Xdx = P$; $\int Pdx = Q$, $\int Qdx = R$; ... und integrirt theilweise; so erhält man

$$\int a^x \cdot Xdx = a^x P - \int a^x Log.\ a\ Pdx \ldots\ldots (65),$$

$$\int a^x Log.\ a\ Pdx = a^x Log.\ a\ Q - \int a^x (Log.\ a)^2\, Qdx;$$

durch Substitution wird die Gleichung (65)

$$\int a^x.\ Xdx = a^x P - a^x Log.\ a.\ Q + \int a^x (Log.\ a)^2\, Qdx.$$

Setzt man diese Art zu integriren fort, so erhält man überhaupt:

$$\int a^x X dx = a^x [P - Q \text{ Log. } a + R (\text{Log. } a)^2 - \ldots.]$$
$$\pm \int Z a^x (\text{Log. } a)^n dx.$$

343) Macht man bei $X = \frac{1}{x^5}$ von dieser Formel Gebrauch, so findet man:

$$P = -\frac{1}{4x^4};\ Q = \frac{1}{3.4x^3};\ R = -\frac{1}{2.3.4x^2};\ Z = \frac{1}{2.3.4x};$$

daher

$$\int \frac{a^x dx}{x^5} = a^2 \left[-\frac{1}{4x^4} - \frac{\text{Log. } a}{3.4x^3} - \frac{(\text{Log. } a)^2}{2.3.4x^2} \right]$$
$$- \frac{(\text{Log. } a)^3}{2.3.4} \int \frac{a^x dz}{x}.$$

Das Integral von $\frac{a^x dx}{x}$ ist eine transcendente Funktion, welche man bis jetzt noch nicht bestimmen konnte *).

344) Es ist klar, dass man im Allgemeinen auf dieses transcendente Integral $\int \frac{a^x dx}{x}$ kommen müsse, welche ganze negative Zahl man auch immer als Exponent von x annehmen mag; denn da in den aufeinanderfolgenden Funktionen P, Q, R, ... die Exponenten von x immer um eine Einheit kleiner werden; so muss die letzte dieser Funktionen die Form $\frac{A}{x}$ haben, das letzte Integral wird daher sein:

$$\int \frac{A a^x dx}{x} = A \int \frac{a^x dx}{x},$$

weil A eine constante Grösse ist.

*) Vergl. *Mayer* vollständigen Lehrbegriff der höhern Analys. tom. II. pag. 107.

Um einen Näherungswerth des Integrals von $\frac{Aa^x dx}{x}$ zu erhalten, giebt es kein anderes Mittel, als in diesem Ausdruck die Reihe von a^x zu substituiren, nämlich

$$1 + x \,\text{Log.}\, a + \frac{x^2}{2}(\text{Log.}\, a)^2 + \frac{x^2}{2.3}(\text{Log.}\, a)^3 + \ldots .$$

und hierauf jedes Glied besonders zu integriren.

345) Setzt man $u = x^y$ in der Gleichung $\frac{du}{u} = \text{d.Log.u}$, oder vielmehr in $du = u \,\text{Log.}\, u$, so ist

$$dx^y = x^y \,\text{d. Log.}\, x^y.$$

So oft sich also ein Differenzial in zwei Theile zerlegen lässt, wodurch der eine durch x^y, der andere durch $\text{d. Log.}\, x^y$ dargestellt ist, wird $x^y + C$ das Integral sein.

346) Die Integration vermittelst der Reduktionsformel (Art. 279) lässt sich auch auf den Ausdruck $Xdx(\text{Log.}x)^n$ anwenden. Denn wenn man das Integral von Xdx durch $X_{,}$ bezeichnet, so hat man

$$\int Xdx\,(\text{Log.}x)^n = X_{,}(\text{Log.}\,x)^n - n\int \frac{X_{,}}{x} dx\,(\text{Log.}x)^{n-1}.$$

Man lasse nun dieses letztere Integral von einem andern, dessen Form $\int X_{,,}(\text{Log.}\,x)^{n-2}$ sein mag, abhängen, und fahre so weiter fort.

Von der Reihe des Johann Bernouilli.

347) Wir haben oben gesehen, dass viele Differenzialausdrücke nur dann integrabel seien, wenn sie in Reihen entwickelt dargestellt werden, und dass man, wenn durch Xdx ein Differenzial, worin X eine Funktion von x ist, bezeichnet wird, erst die Funktion, derer Bezeichnung X ist, in eine Reihe entwickeln, und nach vollbrachter Substitution dieser Reihe in die Formel Xdx integriren müsse.

Die *Bernouillische* Reihe hat den Vortheil, $\int Xdx$ in eine Reihe zu entwickeln, bevor man die Form der

Funktion x gegeben hat; diese Reihe ist im Integralcalcul gerade das, was die Taylorsche in der Differenzialrechnung. Will man also Xdx theilweise integriren, so vergleiche man $\int Xdx$ mit dem ersten Gliede der Formel

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

und man hat:

$$X = u;\ dx = dv;$$

die theilweise Integration lässt sich mithin verrichten, wenn man schreibt:

$$\int Xdx = Xx - \int xdX \ldots\ldots (66);$$

nimmt man das Integral hinsichtlich der Veränderlichen x, so erhält man:

$$dX = \frac{dX}{dx} \cdot dx;$$

folglich

$$\int xdX = \int \frac{dX}{dx}\, xdx.$$

Wird ferner theilweise integrirt, so lässt sich in diesem Falle u durch $\frac{dX}{dx}$ und dv durch xdv darstellen, so dass $v = \frac{x^2}{2}$; man hat alsdann

$$\int \frac{dX}{dx}\, xdx = \frac{dX}{dx} \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{d^2X}{dx},$$

oder wenn man den Bruch $\frac{1}{2}$ vor das Integrationszeichen setzt,

$$\int \frac{dX}{dx}\, xdx = \frac{dX}{dx} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{d^2X}{dx} \ldots\ldots (67);$$

wird $\frac{d^2X}{dx}$ durch $\frac{d^2X}{dx^2}$ ersetzt, und auf dieselbe Art verfahren, so erhält man:

$$\int x^2 \frac{d^2X}{dx} \text{ oder } \int \frac{d^2X}{dx^2} \cdot x^2dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \frac{d^2X}{dx^2} - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{d^3X}{dx^2} \ldots\ldots (68)$$

u. s. w.

Wird der Werth des ersten Theils der Gleichung (67) in die Gleichung (66) und in das Resultat der Werth des ersten Theils der Gleichung (68) gesetzt, so ergiebt sich:

$$\int Xdx = Xx - \frac{dX}{dx} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2X}{dx^2} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} - \ldots + \text{Const.}$$

Von der Quadratur der Curven.

348) Es sei s, Fig. 51, der Flächeninhalt einer ebenen Curve. Geht die Abscisse $AP = x$ in $AP' = x + h$ über; so wird auch der Flächenraum s übergehen in

$$\textit{Flächenr.}\ ABM'P' = s + \frac{ds}{dx}h + \frac{d^2s}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \ldots;$$

man wird also den Flächenraum der gemischtlinigten Figur PMM'P' durch folgende Formel erhalten:

$$\textit{Flächenr.}\ PMM'P' = \frac{ds}{dx}h + \frac{d^2s}{d^2x} \cdot \frac{h^2}{2} + \ldots$$

Dieser Flächenraum fällt zwischen die beiden Rechtecke PM' und P'M, derer analytischen Ausdrücke sich leicht ergeben, nämlich:

$$\text{Rechteck } PM' = P'M' \times PP' = f(x+h)\,h,$$
$$\text{Rechteck } P'M = PM \times PP' = f(x\,.\,h);$$

das Verhältniss dieser beiden Rechtecke ist:

$$\frac{f(x+h)\,h}{fx.h} = \frac{f(x+h)}{fx};$$

im Falle des Gränzverhältnisses wird das vorige auf

$$\frac{fx}{fx} = 1$$

reducirt.

Es ist offenbar, dass, da die Oberfläche der gemischtlinigten Figur PMM'P' zwischen den beiden Rechtecken fällt, der Flächenraum jener Figur weniger von dem Rechtecke P'M als vom Rechtecke PM' verschieden sei. Hat man daher das Gränzverhältniss $\frac{PM'}{P'M} = 1$,

so ist um so mehr die Einheit die Gränze des Verhältnisses:

$$\frac{\text{Flächenr. } PMM'P'}{\text{Rechteck } P'M}.$$

Führt man statt der Glieder dieses Verhältnisses ihre analytischen Ausdrücke ein, so hat man

$$\frac{\frac{ds}{dx}h + \frac{d^2s}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2} + \ldots}{fx.h} = \frac{\frac{ds}{dx} + \frac{d^2s}{dx^2}\cdot\frac{h}{2} + \ldots}{fx};$$

man erhält das Gränzverhältniss, wenn man $h = o$ macht, denn alsdann ist $\frac{ds}{dxf} = 1$, und hieraus $ds = fx.dx$; und wird für fx sein Werth gesetzt, so ergiebt sich:

$$ds = ydx \ldots\ldots (69).$$

349) Das Differenzial des Flächenraums einer Curve lässt sich auch vermittelst der Lehre vom unendlich Kleinen auf folgende Art bestimmen, (Fig. 59):

$$\textit{Trapez } PMM'P' = \frac{PM + PM'}{2} \times PP'$$

$$= \frac{y + (y + dy)}{2} \times dx = ydx + \frac{dxdy}{2};$$

wirft man $\frac{dxdy}{2}$ als ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung weg, so bleibt ydx für das Differenzial stehen.

350) Um hievon Anwendung zu machen, wollen wir zuerst den Flächenraum eines Parabelstückes BMP, Fig. 52, suchen. Es sei $y^2 = mx$ die Gleichung dieser Parabel, derer Anfangspunkt in B ist; durch Differenziation erhält man: $2ydy = mdx$, mithin $dx = \frac{2y}{m}dy$, folglich $ydx = \frac{2y^2}{m}dy$; wird integrirt,

$$\int \frac{2y^2}{m} dy = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{m} + C \ldots\ldots (70).$$

Bei Bestimmung der Constante bemerke man, dass wenn $y = o$, auch das Integral, welches den gesuchten Flächenraum bezeichnet, zugleich Null wird. Diese Voraussetzung reducirt die Gleichung (70) auf $o = o + C$; daher

$$\int y dx = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{m} = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{y}{m} y^2 = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{y}{m} \times mx = \tfrac{2}{3} xy.$$

351) Hier ist der Ort, einige wichtige Bemerkungen über die Bestimmung der Constante zu machen. Wir wollen also das vorige Problem auflösen, indem wir die Parabel betrachten, derer Gleichung

$$y^2 = m + nx \; . \; . \; . \; . \; . \; (71).$$

Hier ist der Anfangspunkt der Abscissen nicht mehr im Scheitel der Curve; denn macht man $y = o$, so giebt die Gleichung (71), $x = -\frac{m}{n}$, und da diese Abscisse im Punkte B, Fig. 53, sich endigen muss, wo $y = o$, so nehme man $\frac{m}{n}$ von B nach A zu, und der Punkt A wird der Anfangspunkt sein. Wird nun wie vorhin verfahren, so findet man:

$$2ydy = ndx; \text{ also } ydx = \frac{2y^2}{n} dy, \text{ und}$$

$$\int y dx = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{n} + C \; . \; . \; . \; . \; . \; (72).$$

Zur Bestimmung der Constante bemerke man, dass die Oberfläche ADMP Fig. 53, die hier durch das Integral bezeichnet ist, Null werden muss, wenn die Ordinate MP mit AD zusammenfällt; nun ist aber AD die Ordinate, welche durch den Anfangspunkt A geht, wo die Abscisse $x = o$; unter dieser Voraussetzung also giebt uns die Gleichung (71) y oder $DA = \sqrt{m}$; macht man daher $\int y dx = o$, und $y = \sqrt{m}$, so wird durch diese Werthe die Gleichung (72) auf $o = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{m^{3/2}}{n} + C$

reducirt; hieraus leitet man $C = -\frac{2}{3} \cdot \frac{m^{3/2}}{n}$ ab, das gesuchte Integral ist daher:

$$\int y dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{n} - \frac{2}{3} \cdot \frac{m^{3/2}}{n} = \textit{Flächenr. } ADMP.$$

352) In dem Vorhergehenden haben wir den Werth von dx aus der Gleichung für die Curve abgeleitet, um ihn in die Formel ydx zu substituiren und hierauf zu integriren. Wir hätten auch noch anders verfahren können, wenn wir eher den Werth von y als von dx in diesen Ausdruck gesetzt hätten. Denn zur Erhaltung des Integrals ist es hinreichend, dass das vorgelegte Differenzial nur eine Veränderliche enthalte. Man erwähle daher jene Substitution, die am wenigsten dem Calcul unterworfen ist.

353) Ein Integral wie z. B. $\int fx \,.\, dx$ kann immer den Flächenraum einer Curve bezeichnen, derer Gleichung $y = fx$. Wenn diese Gleichung gegeben ist, und man substituirt den Werth von y in der Formel $\int y dx$, so hat man wirklich $\int fx \,.\, dx$ für den Flächenraum der Curve. Diess ist die Ursache, dass man sagt, ein Problem ist auf Quadraturen zurück gebracht, wenn dieses Problem uns auf die Integration einer Funktion einer einzigen Veränderlichen geführt hat.

354) Es sei X eine Funktion von x, und man nehme an, man habe durch Integration des Ausdruckes Xdx folgendes erhalten:

$$\int X dx = Fx + C \;.\;.\;.\;.\;. \;(73);$$

dieses Integral, in welchem die Constante C noch nicht bestimmt ist, hat den Namen ein *unbestimmtes allgemeines Integral*, oder einfacher, ein *unbestimmtes Integral*, welches vollständig ist, wenn es die willkührliche Constante C enthält.

355) Wird die Constante C bestimmt, dass z. B. $\int X dx$ verschwindet, wenn $x = a$ wird; so giebt die

Gleichung (73) für diesen Fall $o = Fa + C$, mithin $C = - Fa$, wodurch die Gleichung (73) in folgende sich verwandelt:

$$\int X dx = Fx - Fa.$$

Dieses Integral $Fx - Fa$ heisst alsdann ein *particuläres*. Hieraus ist zugleich offenbar, dass die Anzahl der particulären Integrale eines Differenzialausdruckes unbegränzt ist, weil man unendlich viele verschiedene Hypothesen auf die Constante bauen kann.

356) Nimmt man an, dass das Integral Null und $x = a$ sei; so heisst diess eben so viel, als zugestehen, dass wenn man eine Abscisse, $AB = a$, Fig. 54, nimmt, die Oberfläche zwischen der Gränze BD und zwischen der unbestimmten Gränze MP, die der Abscisse $AP = x$ entspricht, liegen solle. Das Geschäft, wodurch man ein particuläres Integral bestimmt, ist also einerlei mit jenem, wodurch die Lage der Gränze BD, von wo aus das Integral seinen Anfang nimmt, bestimmt würde. Die zweite Gränze PM wird dann auch unveränderlich festgesetzt, wenn man dem x einen bestimmten Werth b beilegt; alsdann wird das particuläre Integral $\int y dx = Fx - Fa$ in folgendes verwandelt:

$$\int y dx = Fb - Fa \; . \; . \; . \; . \; . \; (74)$$

da dann die Oberfläche BDMP nicht mehr willkührlich ist. In diesem Falle heisst das Integral ein *bestimmtes*, und man sagt, es fange von $x = a$ an, und gehe bis $x = b$.

357) Man suche nun das bestimmte Integral von $x^m dx$. In diesem Falle setzt man also voraus, zwei Werthe a und b zu kennen, welche dem unbestimmten Integrale

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C \; . \; . \; . \; . \; . \; (75)$$

Genüge leisten.

Man nehme an, der erste entspreche dem $\int y dx = o$; alsdann hat man

$$\frac{a^{m+1}}{m+1} + C = o,$$

und das particuläre Integral wird sein:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

Setzt man hernach $x = b$, so ergiebt sich das bestimmte Integral

$$\int x^m dx = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

358) Zu diesem Integral gelangt man auch, wenn man nach und nach $x = a$, und $x = b$ in das unbestimmte Integral setzt; dies giebt:

$$\frac{a^{m+1}}{m+1} + C; \text{ und } \frac{b^{m+1}}{m+1} + C;$$

hierauf ziehe man das erstere Resultat vom letztern ab; hiebei muss man aber Sorge tragen, dass immer jener Theil abgezogen werde, welcher den Werth der Funktion von x beim Anfang des Integrals vorstellt.

359) Man bestimme ferner den Flächeninhalt eines rechtwinklichten Dreiecks ABC, Fig. 55. Ist $y = ax$ die Gleichung der Graden AC, und wird dieser Werth von y in die Formel ydx geschrieben, so erhält man axdx; mithin

$$\int y dx = \int ax dx = \frac{ax^2}{2} + C;$$

da der Flächenraum Null ist für $x = o$, so ist auch die Constante gleich Null; folglich

$$\textit{Flächenr. } ABC = \frac{ax^2}{2} = \frac{x}{2} ax = \frac{xy}{2}.$$

360) Setzt man in die Formel ydx den Werth von y aus der Gleichung für den Kreis, so erhält man . . . $\int dx \sqrt{a^2 - x^2}$ für den Flächenraum des Kreises. Nach Art. 282 ist das Integral dieses Ausdruckes

$$\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \, \text{Bog.}\left(\text{Sin.} = \frac{x}{a}\right) + C.$$

Da der Theil $\tfrac{1}{2} a^2 \, \text{Bog.}\left(\text{Sin.} = \frac{x}{a}\right)$ sich nicht bestimmen lässt, wenn man das Verhältniss des Diameters zum Kreisumfang als bekannt annimmt *), so kann offenbar die Integration von $dx \sqrt{a^2 - x^2}$ nicht zur Auflösung des Problems der Quadratur des Zirkels führen. Dasselbe gilt von der Quadratur der Ellipse, welche von

$$\frac{b}{a} \int dx \sqrt{a^2 - x^2}$$

abhängt. Vergleicht man die beiden Ausdrücke, so fliesst daraus folgende Proportion:

Flächenr. der Ellipse : Flächenr. des Zirkels =

$$= \frac{b}{a} \int dx \sqrt{a^2 - x^2} : \int dx \sqrt{a^2 - x^2},$$

oder

Flächenr. der Ellipse : Flächenr. des Zirkels $= \frac{b}{a} : 1$,

folglich

Flächenr. der Ellipse $= \frac{b}{a} \times$ *Flächenr. des Kreises*

$$= \frac{b}{a} \pi a^2 = \pi ab.$$

Von der Rectification der Curven.

361) Eine Curve rectificiren heisst einen Bogen der Curve durch die Länge einer geraden Linie darstellen

*) Wäre z. B. $x = \frac{1}{6} a$, so hätte man $\frac{x}{a} = \frac{1}{6}$, und man verfahre nach Art. 278, um den entsprechenden Bogen zu bestimmen.

Wir haben gefunden, Art. 159, dass

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \ldots\ldots\ldots (76)$$

das Differenzial eines Curven-Bogens sei.

Ist eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen x und y gegeben, und man will die Curve, welcher sie angehört, rectificiren, so differenziire man erst diese Gleichung, ziehe daraus entweder den Werth für dx oder für dy und substituire ihn hierauf in die Gleichung (76); das Radical enthält alsdann nur eine Veränderliche; lässt sich der Ausdruck integriren, so ist die Curve rectificabel.

362) Man nehme z. B. die Curve *), derer Gleichung $y^3 = nx^2$, Art. 165, gefunden wurde. Durch Differenziation ergiebt sich

$$3y^2dy = 2nxdx,$$

und diese Gleichung giebt wiederum:

$$dx = \frac{3y^2dy}{2nx};$$

$$dx^2 = \frac{9y^4}{4n^2x^2}dy^2 = \frac{9y^4}{4ny^3}dy^2 = \frac{9}{4}\cdot\frac{y}{n}dy^2;$$

durch Substitution

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{9y}{4n} + 1\right)dy^2} = dy\sqrt{\frac{9y}{4n} + 1}.$$

Da dy nebst einer Constante das Differenzial des Ausdruckes unter den Wurzelzeichen ist, so mache man nach Art. 271, $\frac{9y}{4n} + 1 = z$; hieraus geht hervor

*) Sie hat den Namen die *zweite cubische Parabel.* Diese Gleichung und jene für die gewöhnliche Parabel sind nur besondere Fälle der allgemeinen Gleichung $y^m = ax^n$; wesswegen diese auch die *Gleichung der Parabel aller Ordnungen* genannt wird.

Man hat auch die Gleichung $xy = a$ der Hyperbel zwischen ihren Assymptoten als einen besondern Fall der Gleichung $x^m y^n = a^{m+n}$ angesehen, und diese desswegen die *Gleichung der Hyperbel aller Ordnungen* genannt.

$dy = \frac{4n}{9} dz$; wird substituirt, so hat man $\sqrt{dx^2 + dy^2}$

$= \frac{4n}{9} z^{1/2} dz$;

daher

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{4n}{9} \cdot \frac{z^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{8n}{27} z^{3/2} + C;$$

oder wenn der Werth von z restituirt wird,

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{8n}{27}\left(\frac{9}{4} \cdot \frac{y}{n} + 1\right)^{3/2} + C.$$

Bei Bestimmung der Constante bemerke man, dass nach der Natur der Gleichung für die Curve y Null ist im Anfangspunkte der Abscissen; wird also das Integral für diesen Punkt Null angenommen, so ist

$$o = \frac{8n}{27} + C; \text{ mithin } C = -\frac{8n}{27},$$

folglich

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{8n}{27} \sqrt{\left[\frac{9}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3} + 1\right]^3} - \frac{8n}{27}.$$

Wenn $x = a$, so ist der Bogen s, zwischen den Gränzen $x = o$ und $x = a$ eingeschlossen,

$$s = \frac{8n}{27} \sqrt{\left[\frac{9}{4}\left(\frac{a}{n}\right)^{2/3} + 1\right]^3} - \frac{8n}{27}.$$

363) Die Gleichung der Cycloide, Art. 200, giebt $dx^2 = \frac{y^2dy^2}{2ay - y^2}$; wird dieser Werth in die Gleichung (76) eingeführt, so ergiebt sich:

$$ds = \sqrt{dy^2 + \frac{y^2dy^2}{2ay - y^2}} = dy \sqrt{\frac{2ay}{2ay - y^2}}$$

$$= dy \sqrt{\frac{2a}{2a - y}} = (2a)^{1/2} \times \frac{dy}{(2a - y)^{1/2}}.$$

Da dy das Differenzial des Ausdrucks unter dem Wurzelzeichen, multiplicirt durch — 1, ist, so mache man, Art. 271, $2a - y = z$; desshalb

$$dy \sqrt{\frac{2a}{2a-y}} = -(2a)^{1/2} z^{-1/2} dz.$$

Diese Gleichung integrirt, giebt

$$\int dy \sqrt{\frac{2a}{2a-y}} = -2(2a)^{1/2} z^{1/2} + C = -2\sqrt{2az} + C,$$

und durch Restitution des Werthes von y;

$$\int dy \sqrt{\frac{2a}{2a-y}} = -2\sqrt{2a(2a-y)} + C \ldots\ldots (77).$$

Um die Constante zu bestimmen, nehme man das Integral so, dass es für $y = 2a$ verschwinde, in welchem Falle die Gleichung (77) auf $o = o + C$ reducirt wird; dies beweiset, dass keine Constante Statt findet, da dann der Bogen der Cykloide sich von dem Punkte B, Fig. 57, wo $y = 2a$, bis zu dem Punkte M erstreckt, dessen Coordinaten x und y sind. Da $2\sqrt{2a(2a-y)}$ der absolute Werth des Bogens MB ist, so bemerke man dass $BE = 2a - y$, mithin $2\sqrt{2a(2a-y)} = 2\sqrt{BD \times BE} = 2\, BG$; hieraus folgt, dass der Bogen der Cykloide MB gleich ist der doppelten Sehne GB; mithin Bog. $AB = 2BD$.

Von der Bestimmung der krummen Oberfläche der Körper, welche durch Umdrehung eines Curvenbogens erzeugt werden.

364) Wenn eine Curve BC, Fig. 51, die sich nur in einer Ebene befindet, sich um die Axe AX dreht, so wird durch diese Umdrehung ein Körper erzeugt. Wir wollen nun das Differenzial des Flächenraums suchen, welcher durch diese Curve beschrieben wurde. Es sei desshalb:

$$AP = x;\ PM = y;\ PP' = h,\ \text{mithin}$$

$$PM = fx = y,$$

$$P'M' = f(x+h) = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \cdots$$

Während dieser Umdrehung beschreiben die Ordinaten MP und M'P' ungleiche Kreise, welche die Grundflächen eines abgestumpften Kegels sind, dessen Seitenlinie die Sehne MM' ist. Der Ausdruck der krummen Oberfläche eines abgestumpften Kegels ist:

$$\frac{\text{Periph. PM} + \text{Periph. P'M'}}{2} \times \text{Sehne MM'}.$$

Ist $1 : \pi$ das Verhältniss des Durchmessers zum Umkreise so geht der vorige Ausdruck in folgenden über:

$$\frac{2\pi.\text{PM}+2\pi\text{P'M'}}{2} \times \text{Sehne}\,\text{MM'} = \pi(\text{PM}+\text{P'M'}) \times \text{Sehne}\,\text{MM'};$$

schreibt man statt der Ordinaten PM und P'M' ihre analytischen Ausdrücke, so erhält man:

Krumme Oberfläche des abgest. Kegels MM'

$$= \pi\left(2y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2} + \dots\right) \text{Sehne MM'},$$

und hieraus durch Division:

$$\frac{\textit{Krumme}\ \text{Oberfläche des abgest. Kegels MM'}}{\text{Sehne MM'}}$$

$$= \pi\left(2y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2} + \dots\right).$$

Bezeichnen wir nun durch u den Flächenraum, welcher durch Umdrehung des Bogens MM' erzeugt wird, und durch s den Curvenbogen. Da dieser Bogen bei der Abnahme von h mit seiner entsprechenden Sehne zusammen zu fallen strebt, so lässt sich der erste Theil der vorigen Gleichung für das Gränzverhältniss durch $\frac{du}{ds}$ ersetzen; da hiedurch der zweite Theil auf $2\pi y$ reducirt wird, so hat man:

$$\frac{du}{ds} = 2\pi y,$$

und folglich $du = 2\pi y.ds$; wird für ds sein, Art. 159, gefundener Werth gesetzt, so hat man endlich:

$$du = 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \dots . \ (78).$$

365) Man könnte auch mit Hilfe des unendlich Kleinen das Element der durch Umdrehung erzeugten Oberfläche als jene des abgestumpften Kegels betrachten, der durch Umdrehung des Elementartrapezes MPP′M′, Fig. 59, um PP′ erzeugt wird; dieser abgestumpfte Kegel würde durch folgende Formel ausgedrückt werden:

$$\text{Periph.}\left(\frac{PM + P'M'}{2}\right) \times MM'$$
$$= \pi\,(2y + dy)\,ds = 2\pi y ds + \pi\, dy ds;$$

unterdrückt man das Glied $\pi dyds$ als ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung, so bleibt noch

$2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}$ *Element einer krummen Oberfläche.*

366) Um hievon Gebrauch zu machen, bestimme man erstens die krumme Oberfläche des Paraboloids, welches durch Umdrehung eines Parabelbogens AM, Fig. 60, um seine Axe erzeugt wird. Die Gleichung der Parabel $y^2 = px$ giebt

$$dx = \frac{2ydy}{p}, \text{ und } dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}.$$

Wird dieser Werth in die Formel $2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}$ eingeführt, so wird sie auf folgende reducirt:

$$2\pi y \sqrt{\left(\frac{4y^2 + p^2}{p^2}\right) dy^2} = \frac{2\pi}{p}\, ydy \sqrt{4y^2 + p^2}.$$

Da ydy nebst einer Constante das Differenzial der Wurzelgrösse ist: so setze man, nach Art. 271, $4y^2 + p^2 = z$: wird differenziirt, so ergiebt sich $ydy = \frac{dz}{8}$, durch Substitution und Integration:

$$\int \frac{x\pi}{p}\, ydy \sqrt{4y^2 + p^2} = \int \frac{\pi}{4p}\, z^{1/2}\, dz$$
$$= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{z^{3/2}}{p} + C = \frac{\pi}{6\pi}\,(4y^2 + p^2)^{3/2} + C.$$

Um die Constante zu bestimmen, nehme man an, das Integral gehe für $y = o$ auch in Null über, in welchem Falle die vorige Gleichung auf folgende zurückgebracht wird:

$$o = \frac{\pi}{6} p^2 + C, \text{ und hieraus } C = -\frac{\pi p^2}{6}.$$

Gesetzt, das Integral werde von $y = o$ an bis $y = b$ genommen, so ist das Integral innerhalb dieser bestimmten Werthe:

$$\frac{\pi}{6p} [(4b^2 + p^2)^{3/2} - p^2].$$

367) Man bestimme *zweitens* die krumme Oberfläche der Kugel. Da diese Oberfläche durch Umdrehung der halben Peripherie um den Durchmesser erzeugt wird, sei $x^2 + y^2 = a^2$ die Gleichung für den Kreis; wird differenziirt, so findet man $xdx + ydy = o$; daher:

$$dy = -\frac{xdx}{y}, \text{ und } dy^2 = \frac{x^2dx^2}{y^2};$$

substituirt man diesen Werth in die Formel (78), so erhält man:

$$\int 2\pi \sqrt{\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) dx^2} = \int 2\pi dx \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \int 2\pi a dx = 2\pi ax + C \ldots (79).$$

Wegen Bestimmung der Constante nehme man das Integral von dem Punkte A an, Fig, 61, und weil der Anfangspunkt der Abscissen im Mittelpunkte ist, nehme man das Integral für $x = -a$, gleich Null an; vermöge dieser Annahme wird die Gleichung (79) auf folgende reducirt:

$$o = -2\pi a^2 + C; \text{ mithin } C = 2\pi a^2;$$

nach vollbrachter Substitution dieses Werthes in die Gleichung (79) ergiebt sich:

$$\int 2\pi a dx = 2\pi (ax + a^2).$$

Man nehme nun das bestimmte Integral zwischen $x = -a$ und $x = a$; zu diesem Entzwecke braucht

man nur in der vorigen Formel x in a zu verwandeln, so erhält man für die krumme Oberfläche der Kugel:

$$\int 2\pi a dx = 2\pi\,(2a^2) = 4\pi a^2.$$

368) Hiernach lässt sich die krumme Oberfläche des geraden Cylinders finden. Denn da seine Oberfläche durch Umdrehung des Rechtecks AD, Fig. 62, um die Axe AB erzeugt wird; so ist, wenn man A = a, CA = b setzt, die Gleichung der Geraden CD, y = b; folglich dy = o. Substituirt man diese Werthe in die Formel (78), so reducirt sie sich auf $2\pi b dx$; wird integrirt, so ist:

$$\int 2\pi b dx = 2\pi bx + C.$$

Nimmt man das innerhalb x = o und x = a bestimmte Integral, so findet man für die krumme Oberfläche des Cylinders:

$2\pi ba = 2\pi b \times a =$ *Umkreis der Grundf.* $\times$ *Höhe.*

Was die Krumme Oberfläche des Kegels anbelangt, bemerke man, dass dieser Körper durch die Bewegung des rechtwinklichten Dreiecks ABC, Fig. 55, um die Axe AB erzeugt wird. Man setze nun AB = a, CB = b, und man hat $y = \frac{b}{a}x$ für die Gleichung der Geraden AC; wird diese Gleichung differenziirt, so giebt sie:

$$dy = \frac{b}{a}dx, \text{ und } dy^2 = \frac{b^2}{a^2}dx^2;$$

substituirt man diese Werthe von y und dy^2 in die Formel (78), so hat man:

$$\int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int 2\pi \frac{bx}{a^2} dx \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \pi \frac{bx^2}{a^2} \sqrt{a^2 + b^2} + C;$$

nimmt man das Integral zwischen x = o und x = a, so ergiebt sich:

Krumme Oberfläche des Kegels $= \pi b \sqrt{a^2 + b^2}$

$$= 2\pi b \times \frac{AC}{2} = \text{Periph. BC} \times \frac{AC}{2}.$$

Von der Cubatur der durch Umdrehung entstandenen Körper.

369) Man bezeichne durch v das Volumen, welches durch Umdrehung der gemischtlinigten Figur ABPM, Fig. 51, um die Axe AX erhalten wird; wenn überdiess die Abscisse AP $=$ x, in AP′ $=$ x $+$ h übergeht, so wächst auch der durch Umdrehung entstandene Körper um jenes Stück, welches durch Umdrehung des gemischtlinigten Trapezes PMM′P′ um die nämliche Axe erzeugt wird. Das Volumen aus ABMP ist eine Funktion von x, weil es zugleich mit x wächst und abnimmt; eben so ist das Volumen aus ABM′P′ eine Funktion von x $+$ h, und hat zum Ausdrucke:

$$v+\frac{dv}{dx}h+\frac{d^2v}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\ldots.$$

Wird daher das durch Umdrehung von ABMP erzeugte Volumen hievon abgezogen, so bleibt:

$$\frac{dv}{dx}h+\frac{d^2v}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\ldots.$$

für das Volumen aus PMM′P′. Da nun dieses Volumen zwischen den Cylindern aus den Rechtecken MP und M′P weniger von dem einen Cylinder verschieden ist, als die Cylinder selbst unter sich, so wird, wenn es sich zeigen lässt, dass im Falle des Gränzverhältnisses das Verhältniss dieser Cylinder die Einheit ist, dieses um so mehr der Fall bei dem Verhältnisse des Körpers aus PMM′P′ zu einem der Cylinder sein. Hieraus folgt offenbar:

Cylinder aus PM′ $= \pi\,[f(x+h)]^2\,h$,

Cylinder aus P′M $= \pi\,(fx)^2\,h$;

daher wird das Verhältniss dieser Cylinder durch

$$\frac{[f(x+h)]^2}{(fx)^2}$$

ausgedrückt; macht man h $=$ o, so wird gewiss dieses Verhältniss auf die Einheit reducirt. Dasselbe muss also auch vom Verhältnisse des Körpers aus PMM′P′ zum

Cylinder aus MP′ Statt finden. Da aber, wenn dieses Verhältniss durch

$$\frac{\frac{dv}{dx}h + \frac{d^2v}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2} + \ldots}{\pi(fx)^2 h} = \frac{\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2}\cdot\frac{h}{2} + \ldots}{\pi(fx)^2}$$

dargestellt wird, im Falle des Gränzverhältnisses ist

$$\frac{\frac{dv}{dx}}{\pi(fx)^2} = 1,$$

so hat man:

$$\frac{dv}{dx} = \pi(fx)^2 = \pi y^2,$$

daher

$$dv = \pi y^2 dx \;\ldots\ldots\; (80).$$

370) Durch die Betrachtung des unendlich Kleinen würde man zu demselben Resultate gelangen. Denn der Körper MON, Fig. 64, kann als in unendlich dünne Scheiben, durch Ebenen zu der Umdrehungsaxe senkrecht geschnitten gedacht werden. Die eine von diesen Scheiben, welche das Element des Körpers ist, kann als ein Cylinder angesehen werden, dessen Grundfläche der Kreis aus y, und dessen Höhe die Seitenlinie ab $=$ dx ist; der Werth dieses Elements ist daher durch $\pi y^2 dx$ bezeichnet.

371) Benutzen wir nun diese Formel bei Auffindung des Körperinhalts des länglichten Ellipsoids, welches durch Umdrehung der Ellipse um ihre grosse Axe erzeugt wird; die Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ der Ellipse für den Mittelpunkt in die Formel $\pi y^2 dx$ für y^2 substituirt, giebt

$$\pi y^2 dx = \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx;$$

wird hierauf integrirt,

$$\int \pi y^2 dx = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right) + C \ldots . (81).$$

Nehmen wir an, das Integral wäre Null in dem Punkte A, Fig. 56, wo $x = + a$; alsdann ist

$$C = \pi \frac{b^2}{a^2} \times {}^2/_3\, a^3;$$

durch Substitution dieses Werthes von C wird die Gleichung (81)

$$\int \pi y^2 dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} + {}^2/_3\, a^3 \right).$$

Macht man nun $x = a$, um das bestimmte Integral zwischen $x = - a$ und $x = a$ zu erhalten, so ergiebt sich

$$\int \pi y^2 dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \cdot \tfrac{4}{3} a^3,$$

und dieses ist der kubische Inhalt des länglichten Ellipsoids. Wenn $b = a$, so verwandelt sich dieses Volumen in jenes der Kugel, derer Werth alsdann

$\frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} \pi a^2 \times 2a = \frac{2}{3}$ *des umschriebenen Cylinders.*

Man bestimme ferner das Volumen des Umdrehungsparaboloids. Man nehme desshalb als erzeugende Linie die Parabel aller Ordnungen; die Gleichung dieser Parabel giebt

$$y = a x^{\frac{n}{m}};$$

wird dieser Werth in die Formel (80) substituirt, so geht daraus hervor

$$v = \int \pi y^2 x^{\frac{2n}{m}} dx = \frac{m \pi a^2 x^{\frac{2n+m}{m}}}{2n + m} + C.$$

Um die Constante zu bestimmen, nehme man an, das Volumen sei Null im Anfangspunkte, wo $x = o$; so ist auch $C = o$. Für die gemeine Parabel ist $m = 2$, $n = 1$; mithin

$$v = \pi a^2 \frac{x^2}{2} = \pi a^2 x \frac{x}{2} = \pi y^2 . \frac{x}{2}.$$

Da aber πy^2 der Flächenraum des Kreises, dessen Strahl PM, Fig. 65; so bezeichnet der Ausdruck $1/_2\, \pi y^2 . x$ die

Hälfte des Cylinders aus APMB um die Axe der Abscissen. Der Körperraum des gemeinen Paraboloids ist daher die Hälfte vom Körperraum des umschriebenen Cylinders.

Von der Cubatur der durch krumme Oberflächen begränzten Körper vermittelst doppelter Integrale.

372) Man bestimme den Ausdruck des Differenzials eines Volumens, das durch eine Fläche begränzt wird, derer Gleichung gegeben ist. Es sei EDCB, Fig. 85, ein Volumen zwischen dem Winkel der Coordinatenaxen (A,x), (A,y) und (A,z), und begränzt durch eine ebene Fläche DCG die zu (y,z) parallel ist; wenn x in x + h übergeht, so wächst das Volumen um das Stück DD′CC′, dessen Seitenlinie h ist; wird das hiedurch erhaltene Volumen durch V′ bezeichnet, so hat man:

$$V' = V + \frac{dV}{dx} h + \frac{d^2V}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{d^3V}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{2.3} + \cdots$$

und das Stück DD′CC′FG ist alsdann:

$$V' - V = \frac{dV}{dx} h + \frac{d^2V}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{d^3V}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{2.3} + \cdots;$$

nimmt man das Gränzverhältniss, so erhält man:

$$\frac{V' - V}{h} = \frac{dV}{dx} \quad \ldots\ldots (82).$$

Wir haben schon hinreichend von den beiden Methoden der Gränzverhältnisse und des unendlich Kleinen gesprochen, so dass wir nun keinen Anstand mehr nehmen, aus der letztern einige Betrachtungen herzuleiten, wodurch dieser Gegenstand näher ans Licht gebracht wird; es wird alsdann nicht schwer sein, auf die Gränzverhältnisse zurückzukommen. Die Gleichung (82) zeigt an, dass $\frac{dV}{dx}$ der Differenzial-Coëfficient ist, der das Volumen begränzt; folglich ist $\frac{dV}{dx}dx$ das Differenzial, welches nichts anderes, als eine dünne Scheibe DD′CC′FG

ist, dessen Seitenlinie dx. Lässt man in dieser Scheibe x variiren, so wird sie in der Richtung der y unendlich dünn, da sie es schon in der Richtung der x ist; sie wird daher in ein kleines Elementar-Prisma ID'KF reducirt, dessen Höhe x, und Grundfläche FGKL = dxdy sein wird; es ist also:

$$\frac{d^2V}{dxdy}\,dxdy = zdxdy,$$

und hieraus:

$$\frac{d^2V}{dxdy} = z;$$

wird z durch seinen Werth aus der Gleichung der Curve ersetzt, so wird er im Allgemeinen eine Funktion von x und y sein, die wir durch M bezeichnen wollen; es ist alsdann

$$\frac{d^2V}{dxdy} = M.$$

373) Um das Volumen mit Hilfe dieses Ausdrucks zu bestimmen, schreibe man ihn auf folgende Art:

$$\frac{d\,\dfrac{dV}{dx}}{dy}\,dy = Mdy;$$

die Bezeichnung des ersten Theiles zeigt, dass man zum Differenzial von $\frac{dV}{dx}$ gelangte, indem man y als veränderlich und x als Constant betrachtete; dieselbe Voraussetzung muss also auch statt finden, wenn man durch eine umgekehrte Operation integrirt, da dann x als eine beständige Grösse in der dem Integral beigefügten Constante enthalten sein wird. Wir wollen daher diese Constante als eine Funktion von x betrachten, und sie durch X bezeichnen; wir finden bei der ersten Integration:

$$\frac{dV}{dx} = \int Mdy + X \;.\;.\;.\;.\;.\; (83).$$

Um die zweite Integration zu bewerkstelligen, bemerken

wir, dass die Bezeichnung $\frac{dV}{dx}$ dahinweisset, das Differenzial des Volumens zu nehmen, indem x als die einzige Veränderliche betrachtet werde; dieselbe Voraussetzung muss also auch bei der Integration beibehalten werden. Wird nun die hier beigefügte Constante, die eine Funktion von y ist, durch Y bezeichnet, und zuvor durch dx vervielfacht, so ergiebt sich:

$$V = \int dx\,(\int M dy + X) + Y.$$

374) Da die Ordnung der Integrationen willkührlich ist, so können die vorhin verrichteten Operationen auch so angezeigt werden:

$$V = \int\int z\,dy\,dx \ldots\ldots\ldots (84).$$

375) Um von diesem Verfahren eine Anwendung zu zeigen, wollen wir das Volumen der Kugel suchen. Aus der Gleichung für die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

leite man den Werth von z ab, und setze ihn in die Formel (84); so ist:

$$\int\int z\,dx\,dy \text{ oder } \int dy \int z\,dx = \int dy \int dx \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \ldots (85);$$

wird y constant betrachtet, und A^2 die Differenz $r^2 - y^2$ genannt, welche gewiss positiv ist, weil r grösser als y; alsdann findet man durch Integration hinsichtlich x,

$$\int dx \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = \int dx \sqrt{A^2 - x^2};$$

nun aber, nach Art. 282:

$$\int dx \sqrt{A^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{A^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} A^2 \text{Bog.}\left(\text{Sin.} = \frac{x}{A}\right) + Y,$$

wird der Werth für A^2 wieder hergestellt,

$$\int dx \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} + \tfrac{1}{2}(r^2 - y^2)\,\text{Bog.}\left(\text{Sin.} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - y^2}}\right) + Y (86),$$

Um das bestimmte Integral nehmen zu können, bemerke man, dass wenn die Constante y durch AP, Fig. 86, dargestellt wird, die Projection aller Punkte, die man durch dieses Integral bestimmen will, auf der Rich-

tung von PM sei. Denn wenn die Veränderliche z die Ordinate irgend eines dieser Punkte ist; so sind AQ und QN seine andern Coordinaten, und QN gleich der Constante AP, und die andere Coordinate AQ, auf der Seite der x lässt sich durch PN ersetzen, so dass wenn die x auf der Geraden PM genommen werden, die y beständig sind. Wird nun das Integral von P nach M, d. i. von $x = o$ bis $x = PM = \sqrt{r^2 - y^2}$ genommen, nach und nach für x im zweiten Theile der Gleichung (80) die Werthe $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ und $x = o$ substituirt, letzteres Resultat vom erstern abgezogen, so findet man für das Integral innerhalb bestimmter Gränzen:

$$\tfrac{1}{2}(r^2 - y^2) \text{ Bog. } (\text{Sin.} = 1);$$

bemerkt man nun, dass der Bogen, dessen Sinus der Einheit gleicht, ein Quadrant ist, der durch $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet zu werden pflegt, so wird dieses bestimmte Integral sein:

$$\tfrac{1}{2}(r^2 - y^2) \times \frac{\pi}{2};$$

wird dieser Werth von $\int dx \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ in die Gleichung (85) substituirt, so hat man:

$$\int\int z dx dy = \tfrac{1}{4}\pi \int (r^2 - y^2) dy = \tfrac{1}{4}\pi\left(r^2 y - \frac{y^3}{3}\right) X; +$$

und wird von $y = o$ bis $y = r$ integrirt,

$$\int\int z dx dy = \frac{\pi}{4}\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{2\pi r^3}{12} = \tfrac{1}{6}\pi r^3.$$

Diess ist das Volumen, welches auf dem Quadranten BAC ruht, und ist daher der achte Theil der ganzen Kugel (vierte Note).

Von der Quadratur der krummen Flächen, vermittelst doppelter Integrale.

376) Es sei $EDCB = S$, Fig. 85, eine krumme Fläche, und man nehme an, die Abscisse x wachse um h; diese Fläche wird alsdann $S + \frac{dS}{dx} h + \frac{d^2S}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \ldots;$

nimmt man das Gränzverhältniss, so wird das Verhältniss des Wachsthums der Funktion S zu jenem der Veränderlichen x auf $\frac{dS}{dx}$ reducirt; hieraus leitet man das Differenzial $\frac{dS}{dx}dx$ ab, welches in der Figur durch den Streifen DD′C′C, dessen Breite unendlich klein ist, vorgestellt wird. Lässt man nun in DD′C′C auch y variiren, und nimmt an, dass y unendlich klein werde, so wird der Streifen DD′C′C auf DD′I′I reducirt, dessen Ausdruck mithin $\frac{d^2S}{dxdy}dxdy$.

Da nun die Fläche DD′I′I unendlich klein ist, so kann sie als eben betrachtet werden; multiplicirt man sie daher durch den Cosinus ihrer Neigung γ zu der Ebene von (x, y) so wird sie gleich dxdy, (fünfte Note), und man hat alsdann

$$DD'I'I \text{ Cos. } \gamma = dxdy,$$

oder

$$\frac{d^2S}{dxdy}dxdy \text{ Cos. } \gamma = dxdy,$$

folglich

$$\frac{d^2S}{dxdy} = \frac{1}{\text{Cos. } \gamma}.$$

Um den Werth von γ zu bestimmen, sei $Ax + By + Cz + D = o$ die Gleichung einer berührenden Ebene; man weiss, dass diese Ebene mit der Ebene der (x, y) einen Winkel bildet, der durch die Gleichung

$$\text{Cos. } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

gegeben ist (Siehe die sechste Note). Betrachtet man also $Ax + By + Cz + D = o$ als die Gleichung der Ebene, welche die krumme Fläche in jenem Punkte berührt, dessen Projection dxdy ist; so hat man

$$\frac{d^2S}{dxdy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; (87).$$

Zur Bestimmung der Differenzial-Coëfficienten, welche sich in diesem Ausdrucke vorfinden, bemerke man, dass die in gedachtem Punkte berührende Ebene mit der krummen Fläche, deren Gleichung durch $z = f(x, y)$ bezeichnet werde, zusammen fliesset. Die Werthe von $\frac{dz}{dy}$ und von $\frac{dz}{dx}$, die sich in dem Ausdrucke für Cos. γ vorfinden, müssen also, nach Art. 75, als dieselben betrachtet werden, als wenn sie unmittelbar aus der Gleichung $z = f(x, y)$ abgeleitet wären. Hat man daher diese Substitutionen gemacht, so integrire man zweimal die Gleichung (87), welche Operation, wie vorhin, durch das doppelte Integrationszeichen angedeutet wird; man hat nach diesem:

$$S = \iint dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

377) Um hievon eine Anwendung zu zeigen, wollen wir den Ausdruck der Oberfläche der Kugel suchen. Es sei daher die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \; \ldots\ldots \; (88);$$

wird differenziirt, und nachher durch 2 dividirt, so hat man

$$xdx + ydy + zdz = o:$$

und hieraus

$$dz = -\frac{x}{z} dx - \frac{y}{z} dy;$$

folglich

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}; \; \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}.$$

Werden diese Werthe in den Ausdruck $\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ substituirt, so verwandelt er sich in

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{1}{z}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{r}{z};$$

und daher

$$\iint dx\,dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}=\iint\frac{r\,dx\,dy}{z},$$

für z seinen Werth gesetzt, so ist

$$\iint dx\,dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}=\iint\frac{r\,dx\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}.$$

378) Um die angezeigten Integrationen wirklich zu verrichten, schreibe man

$$\iint\frac{r\,dx\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\int r\,dy\int\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\ldots.(89),$$

wodurch angezeigt wird, dass man mit der Integration von $\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$, indem x allein als veränderlich betrachtet wird, den Anfang machen müsse. Man setze daher, wie vorhin,

$$r^2-y^2=A^2,$$

und integrire nach Art. 274; man hat alsdann durch Hinzufügung einer constanten Funktion von y,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\text{Bog.}\left(\text{Sin.}=\frac{x}{A}\right)+Y;$$

wird für A sein Werth gesetzt, und hierauf das Integral von $x=o$ bis $x=\sqrt{r^2-y^2}$ genommen, so ergiebt sich:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\text{Bog. (Sin.}=1)=\tfrac{1}{4}\text{ Periph.}=\frac{\pi}{2};$$

dieser Werth in die Formel (89) substituirt, giebt:

$$\iint\frac{r\,dx\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\int\frac{\pi}{2}r\,dy=\tfrac{1}{2}\pi r y+X,$$

indem man durch X die Constante bezeichnet, die als eine Funktion von x betrachtet werden soll. Wird hierauf das Integral zwischen den bestimmten Gränzen $y=o$ und $y=r$ genommen, so erhält man endlich:

$$\iint\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\tfrac{1}{2}\pi r^2.$$

Diess ist derjenige Theil der sphärischen Oberfläche, der durch den Winkel der Axen der rechtwinklichten Coordinaten x, y, z eingeschlossen wird, d. i. der achte Theil der sphärischen Oberfläche.

Von der Integration der Funktionen zweier Veränderlichen.

379) Die beiden Hauptmethoden, derer man sich bedient bei der Integration der Differenzialgleichungen, worin zwei oder auch mehrere veränderlichen Grössen enthalten sind, bestehen 1° in der Trennung der Veränderlichen, um alsdann das gewöhnliche Verfahren für eine Veränderliche anwenden zu können. 2° in der Auffindung solcher Faktoren, vermittelst welcher man ein vollständiges Differenzial herstellen kann.

Von der Trennung der Veränderlichen; von der lineären Gleichung der ersten Ordnung, und von den Eigenschaften homogener Funktionen.

380) Wir haben gesehen, dass jedes integrable Differenzial von der Form $\varphi x dx$ sein muss; mithin wäre man gehemmt in der Integration einer Gleichung, welche Glieder von der Form $y^2\,dx$, $xydx$, $\frac{dx}{y}$, ... enthielte; allein hieraus darf man nicht schliessen, als wenn die Integration unmöglich wäre. Denn kann es durch algebraische Operationen geschehen, dass jedes Glied nur eine einzige Veränderliche enthalte; so lässt sich die Integration sogleich vornehmen. Hieher gehört die Gleichung $xdy + ydx = o$. Diese Gleichung wird in der That, wenn man durch xy dividirt,

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = o;$$

wird integrirt, so giebt sie $\text{Log. } y + \text{Log. } x = C$; bezeichnet man durch A die Zahl, derer Logarithmen C

ist, so kann man dieses Integral auch so schreiben: Log. y + Log. x = Log. A, folglich

$$\text{Log. } xy = \text{Log. } A;$$

nimmt man die Zahlen, so ist

$$xy = A.$$

381) Es sei die allgemeinere Gleichung

$$\varphi x . dy + Fy . dx = 0.$$

Um hier die Trennung der Veränderlichen vornehmen zu können, dividire man die Gleichung durch $\varphi x . Fy$, und man findet:

$$\frac{dy}{Fy} + \frac{dx}{\varphi x} = 0,$$

in welcher Gleichung die Veränderlichen getrennt erscheinen.

382) Um hievon ein Beispiel zu geben, integrire man:

$$(1 + x^2)\, dy = dx \sqrt{y}.$$

Wird durch $(1 + x^2) \sqrt{y}$ dividirt, so ergiebt sich

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{1 + x^2};$$

integrirt man diese Gleichung, so ist

$$2\sqrt{y} = \text{Bog. (Tang.} = x) + C.$$

383) Man könnte auch durch Division die Veränderlichen in der Formel

$$\varphi x . Fy . dx + \varphi' x . F' y . dy = 0$$

trennen, man dürfte nur durch $Fy . \varphi' x$ dividiren, so hätte man:

$$\frac{\varphi x}{\varphi' x} dx + \frac{F' y}{Fy} dy = 0.$$

Dieses Verfahren ist anwendbar auf die Gleichung

$$x^2 y dx + (3y + 1)\, dy \sqrt{x^3} = 0;$$

denn dividirt man durch $y \sqrt{x^3}$, so ergiebt sich:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3}} dx + \frac{(3y + 1)}{y} dy = 0.$$

384) Die Integration liesse sich auch noch bei einer Differenzialgleichung von mehr als zwei Veränderlichen verrichten, und die man auf eine solche zurückbringen könnte, welche in ihren Theilen nur Differenziale enthielte, derer Integral schon bekannt ist, wie diess z. B. in folgenden Funktionen der Fall wäre, nämlich in

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} \text{ ; } yxdy + ydx, \ldots$$

derer respective Integrale $\frac{x}{y}$ und xy sind.

385) Es giebt eine wichtige Gleichung, in welcher die Trennung der Veränderlichen durch ein sehr sinnreiches Verfahren geschieht, nämlich:

$$dy + Pydx = Qdx \ldots\ldots (90),$$

wo P und Q Funktionen von x sind.

Man mache y gleich dem Produkte der beiden unbestimmten Grössen X und z; diess giebt

$$y = zX \text{; } dy = zdX + Xdz \text{;}$$

substituirt man diese Werthe in die Gleichung (90), so wird sie in folgende verwandelt:

$$zdX + X(dz + Pzdx) = Qdx.$$

Da X eine willkührlich angenommene Grösse ist, so bestimme man diese Funktion, indem man die Glieder, welche nicht eingeklammert sind, unter sich gleich setzt; hiedurch wird die vorige Gleichung in folgende zwei zerlegt:

$$X(dz + Pzdx) = o, \text{ und } z.dX = Qdx:$$

die erstere giebt

$$\frac{dz}{z} = - Pdx, \text{ oder Log. } z = - \int Pdx,$$

oder wenn man bemerkt, das Log. e $= 1$,

$$\text{Log. } z = - \int Pdx \text{ Log. } e = \text{Log. } e^{-\int Pdx} \text{;}$$

nimmt man die Zahlen dieser Logarithmen, so hat man

$$z = e^{-\int Pdx.}$$

Aus der zweitern leitet man ab:

$$dX = \frac{Qdx}{z} = Qe^{\int Pdx} dx \text{;}$$

daher

$$X = \int Q e^{\int P dx} dx + C.$$

Werden diese Werthe von z und von X in die Gleichung

$$y = zX$$

gesetzt, so erhält man:

$$y = e^{-\int P dx} \left(\int Q e^{\int P dx} dx + C \right) \ldots (91).$$

Diese Gleichung heisst *lineäre Gleichung der ersten Ordnung*, wovon der Grund in Art. 441 vorkommen wird.

386) Die Trennung der Veränderlichen ist immer bei gleichartigen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung mit zwei Veränderlichen zulässig; eine Gleichung heisst gleichartig, wenn alle ihre Glieder, was die Veränderlichen anbelangt, von derselben Dimension sind; so ist z. B.

$$ax^2y^3 + bxy^4 + cx^2y^3 = 0$$

eine homogene Gleichung, weil die Summe der Exponenten von x und y in jedem Gliede fünf ist, jedes Produkt x^2y^3, xy^4, ... hat fünf Dimensionen.

Die Gleichung

$$ax^6y^2 - bx^5y^3 + cy^8 = 0$$

ist ebenfalls homogen, weil die Summe der Exponenten der Veränderlichen in jedem Gliede acht ist. Obgleich im letzten Gliede kein x sich vorfindet, so kann doch diese Veränderliche zur Potenz Null erhoben gedacht werden.

387) Es sei überhaupt z eine Funktion von x und y, und aus homogenen Gliedern

$$Ax^py^q,\ Bx^{p'}y^{q'},\ Cx^{p''}y^{q''},\ \ldots \text{ bestehend.}$$

Wird durch n die Summe der Exponenten von x und y in jedem Gliede bezeichnet, so hat man vermöge der Gleichartigkeit

$$p + q = n;\ p' + q' = n;\ p'' + q'' = n,\ \ldots$$

Dividirt man nun alle Glieder durch x^n, so wird die

Gleichheit noch fortbestehen, und das Glied $Ax^p y^q$ wird

$$\frac{Ax^p y^q}{x^n} = \frac{Ay^q}{x^{n-p}} = \frac{Ay^q}{x^q} = A\left(\frac{y}{x}\right)^q;$$

das bisher Gesagte lässt sich auf alle übrigen Glieder ausdehnen; man hat daher

$$\frac{z}{x^n} = F\left(\frac{y}{x}\right);$$

und wenn $\frac{y}{x} = q$ gesetzt wird,

$$x^n Fq = z,$$

welcher Gleichung man folgende Form geben kann:

$$Qx^n = z,$$

indem Q als die Funktion Fq angesehen wird.

388) Wir wollen nun die Differenzialgleichung

$$Mdx + Ndy = o$$

betrachten, in welcher die Coëfficienten homogene Funktionen zweier Veränderlichen von der Dimension n sind.

Dividirt man die Gleichung durch x^n, so kann sie unter folgende Form gebracht werden:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + F\left(\frac{y}{x}\right) dy = o;$$

macht man $\frac{y}{x} = z$, so ist

$$\varphi z dx + F z dy = o$$

oder vielmehr

$$\varphi z + Fz \frac{dy}{dx} = o \ldots (92).$$

Um y vermittelst der Gleichung $\frac{y}{x} = z$, oder $y = xz$ zu eliminiren, differenziire man diese Gleichung, und man erhält

$$\frac{dy}{dx} = z + \frac{xdz}{dx};$$

durch diesen Werth wird die Gleichung (92) auf folgende gebracht

$$\varphi z + Fz \left(z + \frac{xdz}{dx}\right) = o;$$

hieraus folgt

$$\frac{xdz}{dx} = - \frac{\varphi z}{Fz} - z = - \frac{(\varphi z + zFz)}{Fz};$$

durch Trennung der Veränderlichen,

$$\frac{dx}{x} = - \frac{dzFz}{\varphi z + zFz},$$

folglich

$$\text{Log. } x = - \int \frac{dzFx}{\varphi z + zFz} + C.$$

Nach vollbrachter Integration braucht man nur für z seinen Werth in das erhaltene Resultat einzuführen.

389) Man nehme z. B. die Gleichung $x^2dy = y^2dx + xydx$, wo $y = xz$ gesetzt werden mag; mithin

$$dy = zdx + xdz;$$

durch Substitution dieses Werthes wird die vorgelegte Gleichung

$$x^2zdx + x^3 dz = z^2x^2dx + zx^2dx;$$

wird reducirt und durch den gemeinschaftlichen Faktor x^2 dividirt, so ist:

$$xdz = z^2dx;$$

hieraus vermittelst Division durch z^2 und x,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2};$$

durch Integration

$$\text{Log. } x = - \frac{1}{z} + C = - \frac{1}{\frac{y}{x}} + C = - \frac{x}{y} + C.$$

390) Es sei ferner die Gleichung

$$\frac{x^2 + yx}{x - y} dy = ydx$$

gegeben. Durch Aufhebung des Nenners werden alle

Glieder dieser Gleichung von zwei Dimensionen. Nehmen wir also $y = xz$ an und reduciren, so wird diese Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = z\,\frac{(1-z)}{(1+z)};$$

wird für $\frac{dy}{dx}$ sein Werth aus der Gleichung $y = zx$ substituirt, so ist

$$z + \frac{xdz}{dx} = \frac{z\,(1-z)}{1+z};$$

wird z auf die andere Seite des Gleichheitszeichens, und alsdann unter gleiche Benennung gebracht, so findet sich

$$\frac{dx}{x} = -\,\frac{(1+z)}{2z^2}\,dz;$$

folglich

$$\text{Log.}\,x = -\int\frac{dz}{2z^2} - \int\frac{dz}{2z} = \frac{1}{2z} - \tfrac{1}{2}\,\text{Log.}\,z + C$$

$$= \frac{x}{2y} + \tfrac{1}{2}\,\text{Log.}\,\frac{y}{x} + C.$$

391) Wenn die gegebene Gleichung ausser den Gliedern $Ax^p y^q$, $Bx^{p'} y^{q'}$, . . . auch noch Polynomien von der Form:

$(Mx^r y^s + Nx^{r'} y^{s'} - \ldots)^k dx$, $(Px^t y^u + Qx^{t'} y^{u'} + \ldots)^l dy$,

enthält, so werden die Veränderlichen noch immer trennbar sein, wenn

$$p + q = p' + q' = (r+s)\,k = (t+u)\,l \ldots. \quad (93).$$

Um dies zu beweisen, mache man

$$(r+s)\,k = n;\ (r'+s')\,k = n \ldots \quad (94)$$

und dividire alle Glieder des Polynomiums

$$(Mx^r y^s + Nx^{r'} y^{s'} + \ldots)^k$$

durch x^n, so wird es

$$\left(\frac{Mx^r y^s + Nx^{r'} y^{s'} + \ldots}{x^{\frac{n}{k}}}\right)^k = \left(\frac{My^s}{x^{\frac{n}{k}-r}} + \frac{Ny^{s'}}{x^{\frac{n}{k}-r'}}\right)^k;$$

nun aber aus den Gleichungen (93)

$$\frac{n}{k} - r = s; \quad \frac{n}{k} - r' = s';$$

folglich wenn diese Werthe in die vorige Gleichung eingeführt werden:

$$\left(M\frac{y^s}{x^s} + N\frac{y^{s'}}{x^{s'}} + ..\right)^k = \left[M\left(\frac{y}{x}\right)^s + N\left(\frac{y}{x}\right)^{s'} + ..\right]^k;$$

hieraus erhellet, dass wenn die Gleichungen (93) Statt finden, die zu Potenzen erhobenen Polynomien, wie alle andern Glieder, auf Funktionen von $\frac{y}{x}$ reducirt werden.

Macht man daher $\frac{y}{x} = z$, oder vielmehr $y = xz$, so lässt sich die Gleichung auf eine Funktion von z bringen. — Um hievon ein Beispiel zu geben, sei

$$xdy - ydx = dx \sqrt{x^2 - y^2} \quad (95).$$

Wird dieser Gleichung folgende Form gegeben:

$$x^1y^0dy - y^1x^0dx = dx(x^2y^0 - x^0y^2)^{1/2},$$

so wird offenbar den Gleichungen (93) Genüge geleistet. Macht man also $y = zx$, mithin

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx},$$

so erhält man nach geschehener Substitution dieser Werthe in die Gleichung (95), nach verrichteter Reduction und Division durch den gemeinschaftlichen Faktor:

$$x\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 - z^2};$$

daher

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

wird integrirt, so ist, nach Art. 273,

$$\text{Log. } x = \text{Bog. } (\text{Sin.} = z) + C;$$

wird für z sein Werth restituirt,

$$\text{Log. } x = \text{Bog.}\left(\text{Sin.} = \frac{y}{x}\right) + C.$$

392) Hat man daher im Allgemeinen eine homogene Funktion der Veränderlichen x, y, z, . . .; so lässt sich immer eine von den Veränderlichen trennen; so z. B. x, wenn $y = tx$; $z = ux$; . . . gesetzt wird *).

393) Bisweilen gebraucht man unbestimmte Exponenten, um eine Gleichung homogen zu machen. Es sei z. B. die Gleichung

$$ay^m x^n dx + bx^p dx + cx^q dy = o$$

gegeben; man nehme $y = z^k$; und da der Exponent k keine Veränderliche, sondern eine unbekannte Constante ist, so erhält man durch Differenziation, Art. 21,

$$dy = kz^{k-1}dz, \text{ und } y^m = z^{km};$$

durch Substitution ergiebt sich:

$$az^{km}x^n dx + bx^p dx + ckx^q z^{k-1} dz = o;$$

diese Gleichung ist homogen, wenn

$$km + n = p; \text{ und } q + k - 1 = p;$$

*) Es sei z. B. $Mdx + Ndy + Pdz = o$ eine homogene Gleichung, worin M, N, P, Funktionen dreier Veränderlichen x, y, z seien. Diese Funktionen M, N, P werden Glieder enthalten von der Form $Ax^p y^q z^r$, $Bx^{p'} y^{q'} z^{r'}$, $Cx^{p''} y^{q''} z^{r''}$, und es wird sein $p + q + r = p' + q' + r' = p'' + q'' + r'' = n$. Substituirt man in einem dieser Glieder z. B. in $Ax^p y^q z^r$, $y = tx$, $z = ux$, so verwandelt es sich in

$$Ax^p t^q x^q u^r x^r = x^{p+q+r} \times At^q u^r = x^n At^q u^r;$$

da dasselbe für die andern Glieder statt findet, wenn man darin die Werthe für y und z substituirt, so erhält man am Ende eine Gleichung, die x^n zum gemeinschaftlichen Faktor hat, wird dieser Faktor aufgehoben, so bekömmt die Gleichung folgende Form:

$$\varphi(t,u)\,dx + F(t,u)\,\text{D}.\,tx + f(t,u)\,\text{D}.\,ux = o;$$

verrichtet man die angezeigten Differenziationen, so hat man

$$\varphi(t,u)\,dx + F(t,u)(tdx + xdt) + f(t,u)(udx + xdu) = o;$$

hieraus wird abgeleitet:

$$[\varphi(t,u) + tF(t,u) + uf(t,u)]\,dx = -x\,[F(t,u)\,dt + f(t,u)\,du];$$

folglich

$$\frac{dx}{x} = -\frac{F(t,u)\,dt + f(t,u)\,du}{\varphi(t,u) + tF(t,u) + uf(t,u)}.$$

wird die unbestimmte k eliminirt, so findet man:

$$\frac{p-n}{m} = p + 1 - q;$$

welche Bedingungsgleichung Statt finden muss, damit die vorgelegte Gleichung durch Substitution von $y = z^k = z^{p+1-q}$ homogen sein könne.

394) Es giebt hinsichtlich der homogenen Funktionen einen wichtigen Lehrsatz, den wir auf folgende Art beweisen wollen.

Es sei $Mdx + Ndy$ das Differenzial einer homogenen Funktion z zwischen den Veränderlichen x und y. Wird durch n die Summe der Exponenten der Veränderlichen in einem der Glieder, woraus die Funktion besteht, bezeichnet, so hat man die Gleichung

$$Mdx + Ndy = dz \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (96).$$

Wird $\frac{y}{x} = q$ gesetzt, so ist, nach Art. 387,

$$Qx^n = z;$$

wird qx für y in die Gleichung (96) geschrieben, und und durch M', N' bezeichnet, was alsdann M und N werden; so verwandelt sich die Gleichung (96) in folgende:

$$M'dx + N' \,\mathrm{D}.\, qx = dz;$$

für z seinen Werth eingeführt, giebt

$$M'dx + N' \,\mathrm{D}.\, qx = d(Qx^n) \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; (97)$$

das Differenzial von qx ist $qdx + xdq$, wird dieser Werth für D. qx gesetzt, so ist

$$(M' + N'q)\, dx + N'xdq = d\,(Qx^n);$$

da aber $(M' + N'q)\, dx$ das Differenzial von Qx^n hinsichtlich x ist; so hat man

$$M + N'q = nQx^{n-1};$$

wird hierin für q sein Werth aus $y = qx$ gesetzt, so ist

$$M + N\,\frac{y}{x} = nQx^{n-1},$$

oder

$$Mx + Ny = nz.$$

395) Dieser Lehrsatz gilt auch noch für homogene Funktionen von irgend einer Anzahl Veränderlichen. Hätte man z. B. die Gleichung

$$Mdx + Mdy + Pdt = dz;$$

in welcher n die Dimension wäre, so brauchte man nur $\frac{y}{x} = q$, $\frac{t}{x} = r$ zu machen, um durch ähnliche Schlüsse zu zeigen, dass man $z = x^n F(q, r)$ und folglich

$$My + Nx + Pt = nz$$

haben müsse.

Bedingungen der Integrabilität der Funktionen zweier Veränderlichen; Integration der Funktionen, welche diesen Bedingungen Genüge leisten. — Aufsuchung der Faktoren, wodurch Funktionen integrabel gemacht werden, die es zuvor nicht sind.

396) Hat man ein Differenzial $Mdx + Ndy = o$, so lässt sich nicht immer behaupten, dass es eine Gleichung gebe, derer Differenzial dem gegebenen gleich sei. Denn differenziirte man z. B. die Gleichung, $f(x, y) = o$, und man leitete daraus $mdx + ndy = o$ ab, so könnte diese Gleichung durch eine Funktion von x vervielfacht zu folgender führen: $Mdx + Ndy = o$, wo die Coëfficienten M und N von m und n verschieden wären; hieraus ist klar, dass die Gleichung $Mdx + Ndy = o$ sich nicht durch eine blose Differenziation von

$$f(x, y) = o$$

ergiebt. Diess fände auch dann Statt, wenn man willkührlich $mdx + ndy = o$ mit der ursprünglichen Gleichung $f(x, y) = o$ verbände; denn man könnte z. B. durch Elimination eines oder mehrerer Glieder zwischen $mdx + ndy = o$ und $f(x, y) = o$ zu folgender Gleichung gelangen,

$$M'dx + N'dy = o,$$

worin die Coëfficienten ebenfalls von m und n verschieden wären.

397) Ist eine Gleichung $mdx + ndy = o$ durch eine blose Vornahme der Differenziation entstanden, so heisst sie ein *vollständiges Differenzial.* Dasselbe gilt von jeder Differenzial-Funktion, die zwar nicht gleich Null, aber doch durch blose Differenziation gefunden worden wäre.

Ist die Differenzial-Gleichung $Mdx + Ndy = o$ kein vollständiges Differenzial, so braucht man nicht an seine Integration zu denken, bevor es nicht durch irgend ein Vorbereitungs-Verfahren vollständig gemacht worden ist.

398) Euler war der erste, der von dieser wichtigen Aufgabe eine Auflösung gab, nämlich:

1°. *Wenn eine Differenzial-Gleichung gegeben ist, zu bestimmen, ob das Differenzial vollständig sei?*

2°. *Auf welche Art lässt sich diese Gleichung integriren?*

Bevor ich von diesem Problem eine Auflösung gebe, will ich nur erinnern, dass nach unserer Annahme, Art. 52, der Ausdruck $\frac{dz}{dx}$ anzeige, dass die Funktion z von x und von y hinsichtlich x differenziirt und durch dx *) dividirt worden sei. Wird nun diese Funktion $\frac{dz}{dx}$ in Hinsicht einer andern Veränderlichen y differenziirt und durch dy dividirt, so werden wir das Resultat

*) Es sei $dz = Adx + Bdy + Cdt + \ldots$ das ganze Differenzial von z Das Verhältniss $\frac{dz}{dx}$ ist nichts anders, als der Differenzial-Coëfficient A. Verlangte man das Verhältniss von $Adx + Bdy + Cdt + \ldots$ zu dx, so dürfte man es nicht durch $\frac{dz}{dx}$ darstellen. In diesem Falle giebt man dem Verhältniss des ganzen Differenzials zu dz eine von folgenden Formen:

$$\frac{1}{dx}\,dz \text{ oder } \frac{d(z)}{dx}.$$

dieser Operation durch $\frac{d^2z}{dxdy}$ anzeigen. Hätte man hingegen den Differenzial-Coëfficienten von z hinsichtlich y und darauf hinsichtlich x genommen, so würde man das Resultat dieses Verfahrens also $\frac{d^2z}{dydx}$ geschrieben haben.

Ist z eine Funktion dreier Veränderlichen x, y, u, so zeigt der Ausdruck $\frac{d^3z}{dxdydu}$ an, dass man den Differenzial-Coëfficienten von z erst hinsichtlich x, hernach hinsichtlich y, und dann den Differenzial-Coëfficienten $\frac{d^2z}{dxdy}$ noch hinsichtlich u genommen habe. Auf ähnliche Art erkennt man aus dem Ausdrucke $\frac{d^5z}{dx^2dy^3}$, dass z fünfmal nacheinander differenziirt worden sei; zweimal hinsichtlich x, und dreimal hinsichtlich y.

399) Nach diesen Vorerinnerungen beruht also der Euler'sche Lehrsatz auf folgendem Satze, der, Art. 172, bewiesen wurde.

Wenn eine Funktion z zweier Veränderlichen x und y gegeben ist, und man nimmt den Differenzial-Coëfficienten von z erst hinsichtlich x, und dann den Differenzial-Coëfficienten von $\frac{dz}{dx}$ hinsichtlich y, so erhält man dasselbe Resultat, als wenn man erst den Differenzial-Coëfficienten von z für y, und dann den Differenzial-Coëfficienten von $\frac{dz}{dy}$ für x genommen hätte.

Man drückt dies also aus, indem man sagt:

$$\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx}.$$

400 Hat man z. B. $z = x^2 + xy$, so findet man $\frac{dz}{dx} = 2x + y$; $\frac{dz}{dy} = x$,

folglich

$$\frac{d^2z}{dxdy} = 1 = \frac{d^2z}{dydx}.$$

401) Nach dieser Bemerkung sei nun z die Funktion, derer Differenzial $Mdx + Ndy = o$; so hat man

$$M = \frac{dz}{dx}; \; N = \frac{dz}{dy}.$$

Wird die erstere dieser Gleichungen hinsichtlich y differenziirt, so giebt sie

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d^2z}{dxdy};$$

die zweitere hinsichtlich x differenziirt, giebt

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d^2z}{dydx};$$

da die Theile auf der Rechten des Gleichheitszeichens dieser Gleichungen identisch sind; so folgt daraus, dass

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (98).$$

So oft nun diese Bedingungsgleichung Statt findet, so ist das gegebene Differenzial vollständig.

402) Man erkennt z. B., dass der Ausdruck $(2x-y)dx - xdy$ ein vollständiges Differenzial ist, weil

$$\frac{dM}{dy} = -1 = \frac{dN}{dx}.$$

Der Ausdruck

$$(y^2 + 3x^2)\,dx + (3y^2 + 2xy)\,dy$$

ist ebenfalls ein vollständiges Differenzial; denn es ist

$$\frac{dM}{dy} = 2y = \frac{dN}{dx}.$$

403) Die Gleichung $ydx - xdy = o$ ist kein vollständiges Differenzial, weil $\frac{dM}{dy} = 1$ und $\frac{dN}{dx} = -1$.

Diese Gleichung ist wirklich aus

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0$$

entstanden, indem man in dieser den gemeinschaftlichen Theiler y^2 aufhob; wird dieser wieder hergestellt, so hat man $M = \frac{1}{y}$, $N = -\frac{x}{y^2}$, wodurch die Bedingung $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ erfüllt ist.

404) Wir wollen nun ein Differenzial zweier Veränderlichen integriren, dessen Vollständigkeit aufgefunden wurde. Man bemerke desshalb, dass, wenn eine Funktion z von x und von y durch Differenziation $Mdx + Ndy$ gegeben hat, das Glied Mdx erhalten worden ist, indem man y als beständig betrachtete. Integrirt man also den Theil Mdx, so kann die dem Integral beigefügte Constante y enthalten. Wird diese durch Y bezeichnet, wobei jedoch vorbehalten wird, dass, wenn es erforderlich ist, Y als eine gewöhnliche Constante zu betrachten sei; so schreibe man also:

$$u = \int Mdx + Y \; . \; . \; . \; . \; . \; (99).$$

Da diese Gleichung durch Differenziation $Mdx + Ndy$ geben musste, so kann N nichts anders als der Differenzial-Coëfficient von $\int Mdx + Y$ hinsichtlich y sein.

Verrichtet man diese Differenziation, so erhält man

$$N = \frac{d\int Mdx}{dy} + \frac{dY}{dy};$$

hieraus folgt diese Gleichung:

$$\frac{dY}{dy} = N - \frac{d\int Mdx}{dy}:$$

wird integrirt,

$$Y = \int\left(N - \frac{d\int Mdx}{dy}\right) dy.$$

Wird dieser Werth von Y in die Gleichung (99) gesetzt, so erhält man

$$u = \int Mdx + \int\left(N - \frac{d\int Mdx}{dy}\right) dy \; . \; . \; . \; (100).$$

Es ist zu bemerken, dass $N - \frac{d\int Mdx}{dy}$ kein x enthält, weil dieser Ausdruck durch dy multiplicirt eine integrable Funktion Y der einzigen Veränderlichen y geben muss.

405) Um zu beweisen, dass der Ausdruck $N - \frac{d\int Mdx}{dy}$ keine Funktion von x ist, nehme man davon das Differenzial hinsichtlich x, und man wird haben:

$$\frac{dN}{dx} - \frac{d(d\int Mdx)}{dydx} \ldots\ldots (101);$$

ändert man die Ordnung der Differenziationen, so wird der zweite Theil dieses Ausdrucks

$$\frac{d(d\int Mdx)}{dxdy} = \frac{d\left(\frac{d\int Mdx}{dx}\right)}{dy};$$

nimmt man nun das Integral $\int Mdx$ hinsichtlich x, so ist das Differenzial von $\int Mdx$ hinsichtlich x, Mdx: mithin $\frac{d\int Mdx}{dx} = M$; hiedurch geht der Audruck $\frac{d\left(\frac{d\int Mdx}{dx}\right)}{dy}$ in $\frac{dM}{dy}$ über; wird dieser Werth in den Ausdruck (101) substituirt, so hat man $\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}$; da aber diese Grösse, vermöge der Bedingungsgleichung der Integrabilität, woraus das Differenzial von $N - \frac{d\int Mdx}{dy}$ hinsichtlich x folgt, Null ist, so ist klar, dass dieser Ausdruck kein x enthält.

406) Vermittelst der Formel (99) lässt sich jede Funktion zweier Veränderlichen integriren, die der Integrabilitäts-Bedingung Genüge leistet. Es sei z. B.

$$(6xy - y^2)\,dx + (3x^2 - 2xy)\,dy \ldots . (102).$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Formel Mdx + Ndy, so hat man:

$$6xy - y^2 = M;\ 3x^2 - 2xy = N \ldots . (103).$$

Die Integrabilitäts-Bedingung ist daher erfüllt, weil man findet, dass

$$\frac{dM}{dy} = 6x - 2y = \frac{dN}{dx}.$$

Integrirt man den Ausdruck $(6xy - y^2)\,dx$ für y beständig, so hat man:

$$\int Mdx = \int (6xy - y^2)\,dx = 3x^2y - y^2x.$$

Wird dieser Werth, und der von N in die Gleichung (100) eingeführt, so hat man:

$$u = 3x^2y - y^2x + \int \left[3x^2 - 2xy - \frac{d(3x^2y - y^2x)}{dy}\right] dy.$$

Der mit dem Integrationszeichen behaftete Theil verwandelt sich durch Verrichtung der angezeigten Differenziation in folgende Form:

$$\int (3x^2 - 2xy - 3x^2 + 2xy)\,dy;$$

nimmt man das Integrationszeichen weg, so hat man ein Differenzial, dessen Glieder sich wechselseitig aufheben. Hieraus erhellet, dass der Ausdruck

$$\int \left[3x^2 - 2xy - \frac{d(3x^2y - y^2x)}{dy}\right] dy$$

eine beständige Grösse ist, in der Voraussetzung, dass jede Grösse, derer Differenzial Null ist, constant sei. Hieraus folgt, dass $3x^2y - y^2x + C$ das gesuchte Integral ist.

407) Wollte man von der im vorigen Artikel gefundenen Formel keinen Gebrauch machen, so könnte man geradezu auf folgende Art verfahren:

Man integrire den Ausdruck (102), indem y als constant betrachtet wird, und man hat:

$$\int Mdx = \int (6xy - y^2)\,dx + Y,$$

oder

$$u = 3x^2y - y^2x + Y \ldots . (104);$$

wird diese Gleichung hinsichtlich y differenziirt, so ergiebt sich:

$$\frac{du}{dy} = 3x^2 - 2xy + \frac{dY}{dy} \ldots . (105);$$

da $\frac{du}{dy}$ nichts anders ist, als der Coëfficient von dy im Ausdrucke (102), so hat man auch

$$\frac{du}{dy} = 3x^2 - 2xy;$$

vergleicht man diese Werthe untereinander, so findet man $\frac{dY}{dy} = o$, und folglich $Y =$ Constant. Wird dieser Werth in die Gleichung (104) g setzt, so findet man:

$$u = 3x^2y - y^2x + \text{Const.}$$

408) Es sei ferner die Funktion:

$$(2y^2x + 3y^3)\,dx + (2x^2y + 9xy^2 + 8y^3)\,dy;$$

wird dieser Ausdruck mit $Mdx + Ndy$ verglichen, so ist:

$$M = 2.y^2x + 3y^3;\ N = 2x^2y + 9xy^2 + 8y^3,$$

und da

$$\frac{dM}{dy} = 4yx + 9y^2 = \frac{dN}{dx},$$

folgt, dass die vorgegebene Funktion ein vollständiges Differenzial sei. Integrirt man hinsichtlich x, so ist:

$$\int Mdx = y^2x^2 + 3y^3x + Y$$

oder

$$u = y^2x^2 + 3y^3x + Y;$$

wird dieser Ausdruck hinsichtlich y differenziirt, so erhält man:

$$\frac{du}{dy} = \frac{d\,(y^2\,x^2 + 3y^3x)}{dy} + \frac{dY}{dy};$$

da aber auch $\frac{du}{dy}$ den Coëfficienten von dy in der gegebenen Gleichung anzeigt, so hat man wiederum:

$$\frac{du}{dy} = 2x^2y + 9xy^2 + 8y^3.$$

Aus diesen beiden Werthen für $\frac{du}{dy}$ leitet man folgende Gleichung ab:

$$\frac{d\,(y^2x^2 + 3y^3x)}{dy} + \frac{dY}{dy} = 2x^2y + 9xy^2 + 8y^3;$$

wird auf der Linken des Gleichheitszeichens die angezeigte Differenziation hinsichtlich y verrichtet, so ergiebt sich:

$$2x^2y + 9y^2x + \frac{dY}{dy} = 2x^2y + 9xy^2 + 8y^3,$$

die auf

$$\frac{dY}{dy} = 8y^3$$

reducirt wird; daher

$$Y = \int 8y^3dy = 2y^4 + C,$$

folglich das gesuchte Integral

$$u = y^2x^2 + 3y^3x + 2y^4 + C.$$

409) Es wurde schon bemerkt, Art. 403, dass die Gleichung $ydx - xdy = o$ kein vollständiges Differenzial sei, weil diese Gleichung einen Faktor $\frac{1}{y^2}$ verloren hat. Hieraus kann man schliessen, dass es dergleichen Gleichungen geben könne, die nicht unmittelbar integrabel sind, aber es doch werden, wenn dieser Faktor hergestellt werden kann.

410) Es sei die allgemeine Gleichung $Pdx + Qdy = o$, welche ein vollständiges Differenzial ist, und z der gemeinschaftliche Faktor, der um grösserer Allgemeinheit willen, eine Funktion von x und von y sein mag; man hat alsdann

$$P = Mz;\ Q = Nz.$$

Werden diese Werthe in die vorige Gleichung substituirt, so verschwindet der gemeinschaftliche Faktor z, und man hat:

$$Mdx + Ndy = o \;\ldots\ldots\; (106).$$

Ist die Gleichung Pdx + Qdy = o als ein vollständiges Differenzial angenommen, so ist:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx};$$

werden für P und Q ihre Werthe eingeführt, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$\frac{dMz}{dy} = \frac{dNz}{dx};$$

nach verrichteter Differenziation der Zähler,

$$\frac{Mdz}{dy} + \frac{zdM}{dy} = \frac{Ndz}{dx} + \frac{zdN}{dx} \quad \ldots \text{(107)}.$$

411) Ist der gemeinschaftliche Faktor z constant, so gehen $\frac{dz}{dy}$ und $\frac{dz}{dx}$ in Null über, und die Gleichung (107) in

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx},$$

mithin ist die nothwendige Bedingung erfüllt, damit die Gleichung (106) ein vollständiges Differenzial sei. Wenn aber z eine Funktion von x und y ist, so hängt die Bestimmung von z von der Gleichung (107) ab; diese Gleichung ist aber schwerer zu integriren, als die gegebene, die nur einen einzigen Differenzial-Coëfficienten $\frac{dy}{dx}$ enthält, während in der Gleichung (107) zwei Differenzial-Coëfficienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ und drei Veränderlichen x, y, z vorkommen.

412) Bei einer homogenen Gleichung ist es nicht schwer diesen Faktor zu bestimmen; denn es sei Mdx + Ndy = o eine homogene Gleichung, die durch Multiplication einer Funktion z von x und y integrabel werde. Man bezeichne durch u das Integral der Gleichung zMdx + zNdy = o; man hat alsdann:

$$zMdx + zNdy = du \quad \ldots\ldots \text{(108)}.$$

Da diese Gleichung homogen ist, so leitet man daraus, nach Art. 394, ab:

$$zMx + zNy = nu \; . \; . \; . \; . \; . \; (109).$$

Ist nun die Dimension von M durch m, und die von z durch k bezeichnet, so wird die Dimension eines der Glieder zMx, zNy alsdann $m + k + 1$ sein. Wird dieser Werth für n in die Gleichung (109) gesetzt, so ist:

$$zMx + zNy = (m + k + 1)\, u,$$

wird die Gleichung (108) durch diese dividirt, so ergiebt sich:

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \frac{du}{u} \times \frac{1}{m + k + 1}.$$

Da der zweite Theil dieser Gleichung ein vollständiges Integral ist, so muss es auch der erste Theil sein, und hieraus folgt, dass $\frac{1}{Mx + Ny}$ der Faktor sei, durch welchen die homogene Gleichung $Mdx + Ndy = o$ integrabel wird.

413) Ist der gemeinschaftliche Faktor z nur eine Funktion von x, so ist $\frac{dz}{dy} = o$, hiedurch verwandelt sich die Gleichung (107) in folgende:

$$\frac{zdM}{dy} = \frac{Ndz}{dx} + z\frac{dN}{dx};$$

hieraus folgt:

$$\frac{Ndz}{dx} = z\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)$$

daher

$$\frac{dz}{z} = \left(\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N}\right) dx \; . \; . \; . \; . \; (110);$$

durch Integration

$$\text{Log. } z = \int \left(\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} \right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{N} \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) dx.$$

Wird durch Log. e vervielfacht, der Coëfficient von Log. e in den Exponenten verwandelt, und die den Logarithmen entsprechenden Zahlen genommen; so hat man:

$$z = e^{\int \frac{1}{N} \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) dx} \quad \ldots\ldots (111).$$

Man darf daher nur die gegebene Gleichung durch diesen Faktor z vervielfachen, auf dass sie ein vollständiges Differenzial werde.

414) Es sei z. B. $y dx - x dy = o$, so erhält man:

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 2;$$

hiedurch verwandelt sich die Formel (110) in

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2dx}{-x};$$

woraus durch Integration folgt:

$$\text{Log. } z = -2 \text{ Log. } x + \text{Log. } C = -\text{Log. } x^2 + \text{Log. } C$$
$$= \text{Log. } \frac{C}{x^2};$$

nimmt man die zu den Logarithmen gehörigen Zahlen, so findet man $z = \frac{C}{x^2}$; der Ausdruck $\frac{C(y dx - x dy)}{x^2}$ wird daher ein vollständiges Differenzial sein.

415) Es giebt unendlich viele Faktoren, welche diese Eigenschaft besitzen. Es sei z ein Faktor, wodurch die Gleichung $Mz dx + Nz dy = o$ ein vollständiges Integral werde; bezeichnet man das Integral dieser Gleichung durch u, so hat man:

$$Mz dx + Nz dy = du.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten durch φu, so erhält man:

$$\varphi u\ (Mxdx + Nzdy) = \varphi udu.$$

Da die Form von φu willkührlich ist, so kann man z. B. $\varphi u = 2u^2$ setzen; alsdann ist $2u^2du$ ein vollständiges Differenzial; mithin wird es auch sein:

$$2u^2\ (Mzdx + Nzdy) = 2u^2du.$$

Der Faktor $2zu^2$ hat also die Eigenschaft, den Ausdruck

$$Mdx + Ndy = o$$

integrabel zu machen.

Es ist klar, dass man auf φu unendlich viele andere Hypothesen bauen kann.

Von den Integrabilitäts - Bedingungen der Funktionen dreier und mehrerer Veränderlichen. Integration der Gleichungen dreier Veränderlichen, welche hiebei Genüge leisten. Von der Bedingungsgleichung, vermöge welcher die Integration der Differenzial - Gleichungen mit drei Veränderlichen von einem gemeinschaftlichen Faktor abhängt, und von den Hilfsmitteln einer gegebenen Gleichung Genüge zu leisten, wenn diese Bedingungs - Gleichung nicht Statt findet.

416) Man nehme an, es seien die Integrabilitäts-Bedingungen des Differenzials einer Funktion von drei Veränderlichen x, y, z, aufzusuchen. Wird diese Funktion durch u bezeichnet, so hat man:

$$du = Mdx + Ndy + Pdz \quad .\ .\ .\ .\ (112);$$

folglich

$$M = \frac{du}{dx};\ N = \frac{du}{dy};\ P = \frac{du}{dz}.$$

Zwei und zwei dieser Gleichungen lassen sich auf drei verschiedene Weisen combiniren, nämlich:

$$1^o.\ \frac{du}{dx} = M \text{ und } \frac{du}{dy} = N,$$

$$2^o.\ \frac{du}{dx} = M \text{ und } \frac{du}{dz} = P,$$

$$3^o.\ \frac{du}{dy} = N \text{ und } \frac{du}{dz} = P.$$

417) Durch einen dem vorigen ähnlichen Beweis leitet man folgende Gleichungen ab:

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}; \frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}; \frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy} \; \ldots\ldots \; (113).$$

Wenn n Veränderliche vorhanden sind, so wird man im Allgemeinen so viele Bedingungsgleichungen haben, als diese Veränderlichen zu zweien ohne Wiederholung combinirt werden können, folglich $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen.

418) Ist das Differenzial du Null, so verwaudelt sich die Gleichung (112) in folgende:

$$Mdx + Ndy + Pdz = o,$$

man gebe ihr folgende Form

$$dz = mdx + ndy \; \ldots\ldots \; (114),$$

indem man setzt:

$$\frac{M}{P} = -m; \frac{N}{P} = -n \; \ldots\ldots \; (115).$$

Betrachtet man nun z als eine Funktion von x und y, so kann die Gleichung (114) behandelt werden, als wenn sie nur zwei Veränderlichen enthielte; die Bedingung der Integrablilität also auf jene im Art. 401 zurückgeführt, d. h. das Differenzial von m hinsichtlich y, und durch diese Veränderliche dividirt, muss dem Differenzial von n hinsichtlich x und dividirt durch x gleich sein. Um diese Ausdrücke zu finden, bemerke man, dass der erstere nicht allein $\frac{dm}{dy}$, sondern noch ein zweites Glied haben muss, welches aus der Differenziation von z, als eine Funktion von y betrachtet, erzeugt wird; dieses Glied wird nach Art. 24 durch $\frac{dm}{dz} \cdot \frac{dz}{dy}$ bezeichnet werden. Was wir bisher von dem ganzen Differenzial, hinsichtlich y genommen, gesagt haben, ist auch anwendbar auf das ganze Differenzial in Hinsicht x, und die Bedingungsgleichung (98), Art. 401, ist für den vorliegenden Fall:

$$\frac{dm}{dy} + \frac{dm}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{dn}{dx} + \frac{dn}{dz} \cdot \frac{dz}{dx};$$

wird auf die andere Seite des Gleichheitszeichens gebracht, und bemerkt, dass nach der Gleichung (114), $\frac{dz}{dx} = m$, und $\frac{dz}{dy} = n$, so hat man:

$$\frac{dm}{dy} - \frac{dn}{dx} + n\frac{dm}{dz} - m\frac{dn}{dz} = o \ldots\ldots (116).$$

Werden nun die Gleichungen (115) differenziirt nach Art. 19, so ergeben sich:

$$\frac{dm}{dy} = -\frac{P\frac{dM}{dy} - M\frac{dP}{dy}}{P^2};\ \frac{dn}{dx} = -\frac{P\frac{dN}{dx} - N\frac{dP}{dx}}{P^2};$$

$$n\frac{dm}{dz} = \frac{N}{P} \cdot \frac{P\frac{dM}{dz} - M\frac{dP}{dz}}{P^2};\ m\frac{dn}{dz} = \frac{M}{P} \cdot \frac{P\frac{dN}{dz} - N\frac{dP}{dz}}{P^2}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung (116), durch Reduction der beiden letzten Glieder, und durch Aufhebung des gemeinschaftlichen Nenners P^2, erhält man nach Verwechslung aller Zeichen:

$$P\frac{dM}{dy} - M\frac{dP}{dy} - P\frac{dN}{dx} + N\frac{dP}{dx} - N\frac{dM}{dz} + M\frac{dN}{dz} = o \ldots (117).$$

Diess ist die Bedingungsgleichung, welche Statt finden muss, damit z als eine Funktion zweier von x und y unabhängigen Veränderlichen betrachtet werden, d. i., damit eine endliche Gleichung zwischen drei Veränderlichen vorhanden sein könne. Nimmt man also von ungefähr eine Gleichung $Mdx + Ndy + Pdz = o$ zwischen drei Veränderlichen; so lässt sish nicht behaupten, dass eine dieser Veränderlichen Funktion zweier andern ist, wenn man nicht voraus weiss, dass der Gleichung (117) Genüge geleistet ist, d. h. es lässt sich nicht behaupten, dass die gegebene Differenzialgleichung das Dasein einer gewissen Gleichung zwischen x, y und z nothwendig mache, oder mit andern Worten, dass diese Differenzialgleichung eine einzige Gheichung als Integral habe.

419) Eine Differenzialgleichung mit dreien Veränderlichen, für welche die Gleichung (117) nicht realisirt werden kann, wurde sonst als absurd betrachtet, zum wenigsten als nichts bezeichnend. *Monge* aber, wie wir bald zeigen werden, bewies, dass man im Irrthum schwebte.

420) Wird den Gleichungen (113) kein Genüge geleistet, und der Faktor, vermittelst dessen $Mdx + Ndy + Pdz$ zu einem vollständigen Differenzial kann ergänzt werden, durch λ bezeichnet; so verwandeln sich die Bedingungsgleichungen (113) in

$$\frac{d\lambda M}{dy} = \frac{d\lambda N}{dx}; \quad \frac{d\lambda M}{dz} = \frac{d\lambda P}{dx}; \quad \frac{d\lambda N}{dz} = \frac{d\lambda P}{dy};$$

verrichtet man die angezeigten Differenziationen, so erhält man:

$$M\frac{d\lambda}{dy} - N\frac{d\lambda}{dx} + \lambda\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = o,$$

$$M\frac{d\lambda}{dz} - P\frac{d\lambda}{dx} + \lambda\left(\frac{dM}{dz} - \frac{dP}{dx}\right) = o,$$

$$N\frac{d\lambda}{dz} - P\frac{d\lambda}{dy} + \lambda\left(\frac{dN}{dz} - \frac{dP}{dy}\right) = o.$$

Multiplicirt man die erstere dieser Gleichungen durch P, die zweitere durch — N, die drittere durch M, und addirt sie alsdann, so heben sich die eingeklammerten Glieder auf, und der gemeinschaftliche Faktor λ, durch welchen die Gleichung theilbar wird, verschwindet, und es bleibt noch zurück:

$$P\frac{dM}{dy} - P\frac{dN}{dx} - N\frac{dM}{dz} + N\frac{dP}{dx} + M\frac{dN}{dz} - M\frac{dP}{dy} = o;$$

diess ist die Bedingungsgleichung (117), welche, wie wir schon gesehen haben, nothwendig ist, damit eine der Veränderlichen Funktion der beiden andern sei, sie ist das Resultat, welches mit dieser Hypothese übereinstimmt; denn könnte die gegebene Gleichung durch Wiederherstellung eines Faktors integrabel werden, so würde sie auf eine einzigs Gleichung zwischen x, y und

z führen, welche mit dem Vorhergehenden im Widerspruche stände, weil eine der Veränderlichen Funktion der beiden andern wäre.

421) Wir wollen nun untersuchen, auf welche Art sich das Integral bestimmen lasse, wenn der Gleichung (117) Genüge geleistet wird. Zu diesem Ende betrachte man erst z als beständig in der Gleichung Mdx + Ndy + Pdz = o, und nenne λ den Faktor, vermittelst dessen diese Gleichung ein vollständiges Differenzial wird. Man bezeichne durch V das Integral hievon; V wird alsdann im Allgemeinen eine Funktion dreier Veränderlichen x, y und z sein; dieses Differenzial muss noch durch eine willkührliche constante Funktion von z, welche φz heissen mag, completirt werden, dass also

$$V + \varphi z = o.$$

Der Differenzial-Coëfficient dieser Gleichung hinsichtlich z muss mit dem Gliede, welches in der vorgelegten Gleichung durch dz vervielfacht ist, identisch sein; man muss daher haben:

$$\frac{dV}{dz} + \frac{d\varphi z}{dz} = P;$$

hieraus folgt

$$d\varphi z = \left(P - \frac{dV}{dz}\right) dz.$$

Da der erste Theil dieser Gleichung nur allein z enthält, so muss auch der zweite sich auf eine Funktion von z reduciren lassen, die integrirt den Werth von φz geben wird.

422) Es sei z. B. die Gleichung

$$yzdx + xzdy + xydz = o;$$

integrirt man yzdx + xzdy, indem z als constant betrachtet wird; so findet man

$$zxy + \varphi z = o.$$

Diese Gleichung hinsichtlich z differenziirt, durch dz dividirt, und dem Coëfficienten von z in der gegebenen gleich gesetzt, giebt:

$$xy + \frac{d\varphi z}{dz} = xy,$$

mithin

$$\frac{d\varphi z}{dz} = o,$$

und folglich $\varphi z =$ Const. Hieraus leitet man $xyz + C$ als das Integral der gegebenen Gleichung ab, wie zu erwarten war.

423) Es sei nun $Mdx + Ndy + Pdz = o$ eine Differenzialgleichung, für welche die Bedingungsgleichung (117) sich nicht realisirt; ferner λ der Faktor, wodurch nur der Theil $Mdx + Ndy$, indem z als beständig betrachtet wird, integrabel gemacht werden kann. Multiplicirt man die gegebene Gleichung durch diesen Faktor, so hat man:

$$\lambda Mdx + \lambda Ndy + \lambda Pdz = o \; . \; . \; . \; . \; (118);$$

integrirt man den Theil $\lambda Mdx + \lambda Ndy$ unter der Voraussetzung, dass z beständig ist, so lässt sich das Integral, wie in Art. 421 darstellen, durch:

$$N + \varphi\, z.$$

Wird das Differenzial dieser Gleichung für drei Veränderlichen genommen, so kann man daraus seine Identität mit der Gleichung (118) nicht schliessen, weil diese nicht durch Differenziation einer andern entstehen kann; hieraus folgt, dass die Gleichung

$$\frac{dV}{dz} + \frac{d\varphi z}{dz} = \lambda\, P \; . \; . \; . \; . \; (119)$$

nur unter einer Bedingung bestehen könne, welche von der Voraussetzung abhängt, dass die Gleichung (118) von einer einzigen differenziirten Gleichung herkomme. Da man nur zum Zwecke hat, der Gleichung (118) Genüge zu leisten, so verlasse man diese Hypothese,

und stelle zwischen den Veränderlichen willkührlich die Beziehung (119) auf; alsdann werden die Gleichungen:

$$V + \varphi z = o\text{; und } \frac{dV}{dz} + \frac{d\varphi z}{dz} = \lambda P \quad . \; . \; . \quad (120)$$

sämmtlich der Gleichung (118) Genüge leisten, indem man die erstere von (120) differenziirt, und sie alsdann der zweiten zuzählt. Das Differenzial von $V + \varphi z$ hinsichtlich z giebt in der That die Glieder $\lambda M dx + \lambda N dy$, und die zweitere von den Gleichungen (120) durch dz vervielfacht den Werth des Gliedes $\lambda P dz$.

424) Es sei z. B.

$$y dy + z dx = dz.$$

Wird z als beständig betrachtet, so ist 2 der Faktor, durch welchen der Theil $ydy + zdx$ integrabel wird; folglich:

$$2ydy + 2zdx - 2dz = o \quad . \; . \; . \; . \quad (121);$$

dieser Gleichung wird durch die Verbindung beider folgenden Genüge geleistet:

$$y^2 + 2zx + \varphi z = o\text{; } 2x + \frac{d\varphi z}{dz} dz = o \; . \; . \; . \quad (122).$$

Wird nämlich die erstere hinsichtlich aller Veränderlichen differenzürt, so giebt sie:

$$2ydy + 2zdx + 2xdz + \frac{d\varphi z}{dz} dz = o;$$

zieht man aus dieser Gleichung den Werth für $2ydy + 2zdx$, und substituirt ihn in (121), so wird diese auf folgende gebracht:

$$-2xdz - \frac{d\varphi z}{dz} dz - 2dz = o,$$

welcher Gleichung vermöge der zweiten von den Gleichungen (122) von selbst Genüge geleistet ist.

425) Aus den Gleichungen (122) erhellet, dass die Form der Funktion φz durchaus willkührlich ist, und dass also, wenn z. B. $\varphi z = z^3$ gesetzt wird, die Gleichungen

$$y^2 + 2zx + z^3 = o\text{; } 2x + 3z^2 - 2 = o \; . \; . \; . \quad (123)$$

dabei Genüge leisten.

426) Vermittelst dieser zwei Gleichungen zwischen drei Veränderlichen lässt sich (siebente Note) eine Curve mit doppelter Krümmung construiren, die in allen ihren Punkten der gegebenen Genüge leistet. Würde man aber statt $\varphi z = z^3$ für φz eine andere Funktion von z wählen, so bestimmte man eine andere Curve mit doppelter Krümmung, die ebenfalls der gegebenen genügte. Hieraus folgt, dass die Gleichungen (122) eine Reihe Curven mit doppelter Krümmung bezeichnen, die der gegebenen Genüge leisten, und die unter sich durch die gemeinschaftliche Eigenschaft verbunden sind, dass ihre Gleichungen nur wegen der durch φz und $\frac{d\varphi z}{dz}$ dargestellten Glieder von einander verschieden sind.

Theorie der willkührlichen Constanten.

427) Hat man eine Gleichung zwischen den Veränderlichen x, y und Constanten, und differenzirt sie, so erhält man eine andere, worin der Differenzial-Coëfficient $\frac{dy}{dx}$ enthalten sein muss; dass man also diese beiden Gleichungen durch

$$F(x, y) = o; \; F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o \; . \; . \; . \; . \; (124)$$

darstellen kann.

Da die Veränderlichen und die Constanten in diesen Gleichungen dieselben Werthe haben, so kann man allgemein eine dieser Constanten vermittelst derselben eliminiren; ich sage allgemein, denn es kann hiebei einen besondern Fall geben, wo diese Elimination unmöglich ist. Hätte man z. B. die Gleichung $y = ax + b$, folglich $\frac{dy}{dx} = a$, so könnte man wohl die Constante a eliminiren, aber es wäre unmöglich, wenn man nicht zwischen a und b ausdrücklich eine gegebene Verbindung annähme, b vermittelst dieser Gleichungen zu eliminiren. Diese Bemerkung ist hinreichend, um die allgemeine

Bedeutung, welche dieser ganzen Theorie der willkührlichen Constanten zum Grunde liegt, begreiflich zu machen. Um auf unsern Gegenstand zurückzukommen, so eliminire man eine Constante aus den Gleichungen (124), woraus eine Gleichung von der ersten Ordnung hervorgeht, die eine Constante weniger, als die Gleichung F (x,y) = o enthält. Wenn man zweimal nach einander die Gleichung F (x,y) = o differenziirt, so hat man, wenn sie selbst mitbegriffen ist, folgende Gleichungen:

$$F(x,y)=o;\ F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=o;\ F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=o \quad (125).$$

Vermittelst dieser drei Gleichungen lassen sich zwei Constanten eliminiren; und da hiebei alle diese Gleichungen werden angewandt worden sein, so muss die Endgleichung die nämlichen Differenzial-Coëfficienten enthalten, folglich von der zweiten Ordnung sein; aber es werden darin zwei Constanten weniger als in F (x, y) = o vorkommen. Man sieht hieraus, dass überhaupt die Differenzialgleichung der Ordnung n nur n Constanten weniger, als die Gleichung F (x, y) = o, von der sie abgeleitet ist, enthalten kann.

428) Es seien a und b die Constanten, welche man willkührlich nennt *), die man mit Hilfe der Gleichungen (125) eliminiren kann; wird b vermittelst F (x, y) = o,

*) Man nennt sie desswegen so, weil irgend eine aus diesen Constanten als jene angesehen werden kann, welche von der Integration einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung ihren Ursprung hat. Es sei z. B. die Gleichung f (x, y, a, b, ...) = o; hieraus leitet man φ (x,y,b,....) = a ab; wird differenziirt, so ist dφ (x, y, b....) = o; es kann folglich a als die willkührliche Constante betrachtet werden, welche man dem Integrale von dφ (x, y, b) beifügen würde. Eben so können irgend zwei von diesen Constanten als aus der Integration einer Differenzialgleichung der zweiten Ordnung entsprungen angesehen werden, u. s. w.
(Anmerk. d. Verf.)

und der Gleichung $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o$, welche aus der vorigen durch Differenziation abgeleitet wird, eliminirt, so erhält man eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung, die sich durch

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right) = o \;\ldots\ldots\; (126)$$

darstellen lässt. Auf der andern Seite giebt das Resultat der Elimination zwischen den Gleichungen $F(x,y) = o$ und $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o$, folgende Gleichung:

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, b\right) = o \;\ldots\ldots\; (127).$$

429) Könnte man durch irgend ein Mittel die Gleichungen (125) und (126) finden, so würde es offenbar hinreichend sein, aus ihnen $\frac{dy}{dx}$ zu eliminiren, um die Gleichung $F(x, y) = o$ zu erhalten. Eliminirt man die Constante a aus der Gleichung (126) und jener, welche durch Differenziation daraus hergeleitet ist; hierauf b aus der Gleichung (127) und jener, welche aus ihrer Differenziation entstehen würde; so erhält man zwei Gleichungen der zweiten Ordnung, welche die willkührlichen Constanten a und b nicht mehr enthalten, und die folglich unter sich gleich sein müssen; denn im entgegengesetzten Falle wären die Werthe von x und y nicht mehr dieselben in beiden. Hieraus folgt, dass eine Differenzialgleichung der zweiten Ordnung aus zwei Differenzialgleichungen der ersten Ordnung herkommen kann, die nothwendigerweise unter sich verschieden sind, weil die willkührliche Constante der einen nicht dieselbe ist mit der willkührlichen Constante der andern.

Man bezeichne durch $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = o$ diese Differenzialgleichung des zweiten Grades, welche durch Elimination der willkührlichen Constanten a und b er-

zeugt wird; die Gleichungen (126) und (127) werden die *ersten*, und die ursprüngliche Gleichung $F(x, y) = o$ das *zweite Integral* genannt.

430) Machen wir von diesen Betrachtungen Anwendung auf die Differenzialgleichung der dritten Ordnung. — Wird $F(x, y) = o$ dreimal nach einander differenziirt, so hat man mit dieser Gleichung:

$$F(x, y) = o;\ F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o;$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = o;\ F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\right) = o.$$

Da diese Gleichungen dieselben Werthe für jede der drei willkührlichen Constanten, welche in $F(x, y) = o$ enthalten sind, zulassen; so kann man allgemein diese Constanten aus diesen Gleichungen eliminiren, und ein Resultat erhalten, welches durch

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\right) = o \ . \ . \ . \ (128)$$

bezeichnet werden mag; diess wird alsdann die Differenzialgleichung der dritten Ordnung von $F(x, y) = o$ sein, und woraus die drei willkührlichen Constanten eliminirt worden sind. So wird umgekehrt $F(x, y) = o$ das *dritte Integral* der Gleichung (128) sein.

431) Eliminirt man nach und nach jede der willkührlichen Constanten vermittelst der Gleichung $F(x, y) = o$, und jener, welche man durch ihre Differenziation ableiten würde, so erhält man drei Gleichungen der ersten Ordnung, welche die zweiten Integrale der Gleichung (128) sind.

Eliminirt man nun zwei der drei willkührlichen Constanten vermittelst der Gleichung $F(x, y) = o$, und jener Gleichungen, welche durch zweimalige Differenziation aus ihr hergeleitet sind, d. h. eliminirt man diese Constanten aus den Gleichungen

$$F(x, y) = o;\ F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o,\ F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = o \ldots (129);$$

so kann man nach und nach in der durch Elimination erzeugten Gleichung eine der drei willkührlichen Constanten beibehalten, folglich wird man eben so viele Gleichungen als willkührliche Constanten haben. Es seien also a, b, c diese willkührlichen Constanten; die Gleichungen, wovon die Rede ist, lassen sich, wenn man sie blos hinsichtlich der in ihnen enthaltenen willkührlichen Constanten betrachtet, auf folgende Weise darstellen:

$$\varphi c = o; \varphi b = o; \varphi a = o \ldots (130).$$

Da die Gleichungen (129) alle zur Elimination dienen, welche zu einer von diesen letztern führt, so folgt daraus, dass die Gleichungen (130) alle von der zweiten Ordnung sein werden; sie heissen die *ersten Integrale* der Gleichung (128).

432) Im Allgemeinen hat eine Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung eine Anzahl n erster Integrale, welche mithin die Differenzial-Coëfficienten von $\frac{dy}{dx}$ bis $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ inclus. d. i. eine Anzahl n — 1 Differenzial-Coëfficienten enthalten; zugleich ist offenbar hinreichend, wenn alle diese Gleichungen bekannt sind, aus ihnen diese Differenzial-Coëfficienten zu eliminiren, um die ursprüngliche Gleichung wieder zu erhalten.

Particuläre Auflösungen der Differenzialgleichungen der ersten Ordnung.

433) Wir haben, Art. 355, gesehen, dass ein Particulärintegral sich immer vom vollständigen Integral herleiten lasse, indem man der in letzterem enthaltenen willkührlichen Constanten einen schicklichen Werth beilegt. Man muss jedoch nicht glauben, dass für jede gegebene Differenzial-Gleichung, der Werth, welcher hier Genüge leisten kann, sich immer in einem dieser Particulärintegrale vorfinden müsse. Hätte man z. B. die Gleichung

$$dy\sqrt{x^2+y^2-a^2} = xdx + ydy \; .\;.\;.\;.\; (131),$$

derer vollständiges Integral

$$y + c = \sqrt{x^2+y^2-a^2},$$

das folglich durch Erhebung zum Quadrate wird:

$$2cy + c^2 - x^2 + a^2 = o \; .\;.\;.\;.\;.\; (132);$$

so ist gewiss, dass, wenn man dem c einen beliebigen constanten Werth beilegt, man ein solches Particulärintegral erhalten werde, welches der gegebenen Gleichung Genüge leistet. Es kann hier auch durch folgende Gleichung Genüge geleistet werden:

$$x^2 + y^2 = a^2 \; .\;.\;.\;.\;.\; (133);$$

denn diese Gleichung differenziirt, giebt $xdx = -ydy$. Obgleich man nun alle Glieder der Gleichung (131) wechselseitig aufheben kann, wenn darin der vorige Werth und der von $x^2 + y^2 = a^2$ substituirt worden sind, so ist doch die Gleichung (133) nicht in dem vollständigen Integral begriffen; denn welchen Werth auch die Constante c in der Gleichung (132) erhalten mag, so kann diese Gleichung niemals die Gleichung (133) zur Folge haben, weil die erstere als die Gleichung einer Parabel niemals die Gleichung (133), welche die Gleichung für den Zirkel ist, werden kann.

Die Gleichung (133), welche der gegebenen Genüge leistet, ohne in dem vollständigen Integrale begriffen zu sein, nennt man eine *besondere Auflösung* der gegebenen.

Clairaut *) (i. J. 1734) machte zuerst hierauf aufmerksam, und man glaubte lange Zeit noch, diese Art Gleichungen ständen mit dem vollständigen Integral in

*) *Euler* scheint jedoch der erste gewesen zu sein, der diese Integrale unter einem solchen Gesichtspunkte betrachtete, sie von den gewöhnlichen Integralen unterschied, und zu ihrer Auffindung allgemeine Regeln aufstellte. Hernach hat man eingesehen, dass sie von der Theorie der Differenzialgleichungen abhängen und diese ergänzen helfen. Man vergl. *Lagrange Calcul des fonctions Leçon* 14me. Man lese ferner die vortreffliche Abhandlung des Herrn *Poisson*, *Journal de l'ecole polytech.* Cah. XIII. pag. 60 ff.

(D. Uebers.)

gar keiner Verbindung. *Lagrange* bewies diese Abhängigkeit, und setzte die Theorie dieses Gegenstandes auseinander, welche wir im Begriffe sind zu entwickeln.

434) Es sei Pdx + Qdy = o eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung. Diese Gleichung kann als aus der Elimination einer Constante c zwischen einer gewissen Gleichung der ersten Ordnung, die durch Mdx + Ndy = o bezeichnet werden mag, und dem vollständigen Integral F (x, y, c) = o dieser Gleichung entstanden gedacht werden. Da nun aber das ganze Geschäft sich dahin beschränkt, die Constante so zu nehmen, dass die Gleichung Pdx + Qdy = o das Resultat der Elimination sei, so muss es auch erlaubt sein, diese Constante variiren zu lassen, vorausgesetzt, dass die Gleichung Pdx + Qdy = o Statt habe. In diesem Falle erhält das vollständige Integral eine grössere Allgemeinheit, und stellt eine unendliche Menge Curven desselben Geschlechts vor, die nur durch einen Parameter d. i. durch eine Constante voneinander verschieden sind. Diese Hypothese ist zulässig, weil, wenn die Gleichung Pdx + Qdy = o gegeben ist, es im Geiste der Analysis liegt, keines der Mittel unversucht zu lassen, welche diese Gleichung herbeiführen könnten.

435) Man nehme nun an, das vollständige Integral sei differenzüirt, indem man c als veränderlich betrachtete, und man habe erhalten:

$$Mdx + Ndy + Cdc = o \; . \; . \; . \; . \; . \; (134),$$

welche Gleichung unter folgende beiden Formen gebracht werden kann:

$$dx + \frac{N}{M}dy + \frac{C}{M}dc = o; \quad \frac{M}{N}dx + dy + \frac{C}{N}dc = o.$$

Es ist gewiss, dass, wenn M und N endlich bleiben und Cdc Null ist, das Resultat der Elimination von c zwischen F(x, y, c) = o, und der Gleichung (134) dasselbe sein wird, wie jenes von c zwischen F (x, y, c) = o und der Gleichung Mdx + Ndy = o, welches Resultat

vermöge der Bedingung . . . $Pdx + Qdy = o$ ist; denn in diesem Falle, wo Cdc Null ist, findet kein Unterschied zwischen der Gleichung (134) und $Mdx + Ndy = o$ Statt. Um aber $Cdc = o$ erhalten zu können, muss einer von den Faktoren dieser Gleichung Null sein, d. i. man muss haben

$$dc = o \text{ oder } C = o;$$

im ersten Falle giebt $dc = o$ den Werth $c =$ *Constante*, wie dies bei particulären Integralen Statt findet; im zweiten Falle begreift die Gleichung $C = o$, c in sich, oder hängt davon ab. Enthält sie c, so können zwei Fälle sich ereignen, entweder enthält die Gleichung lauter Constanten, oder c mit Veränderlichen. Im ersten Falle giebt $C = o$ wiederum $c =$ *Constante*, und im zweiten $c = f(x, y)$ *); wird dieser Werth in die Gleichung $F(x, y, c) = o$ eingeführt, so verwandelt sich diese in eine andere Funktion von x und y, die der gegebenen Genüge leistet, ohne in ihrem vollständigen Integral enthalten zu sein, und ist daher eine besondere Auflösung davon. Man wird aber ein particuläres Integral haben, wenn die Gleichung $c = f(x, y)$ mit Hilfe des vollständigen Integrals sich auf eine Constante bringen lässt.

436) Enthält der Faktor $C = o$ der Gleichung $Cdc = o$ nicht die willkührliche Constante c; so erfährt man, ob die Gleichung $C = o$ zu einer besondern Auflösung Veranlassung gebe, wenn man diese Gleichung mit dem vollständigen Integral in Verbindung bringt. Wenn z. B. $x = M$ aus $C = o$ abgeleitet in das vollständige Integral $F(x, y, c) = o$ gesetzt wird, so wird man erhalten:

$$c = \textit{Constante} = B, \text{ oder } c = fy;$$

im ersten Falle ist $C = o$ ein besonderes Integral, und

*) Man bemerke wohl, dass diese Gleichung entweder $c = fx$ oder $c = fy$ als besondere Fälle einschliese.

(Anmerk. d. Verf.)

im zweitern eine besondere Auflösung, welches sich auf folgende Weise darthun lässt. Wenn für den ersten Fall c eine willkührliche Constante ist, so setze man B an die Stelle von c im vollständigen Integral, und es verwandelt sich dieses in F (x, y, B) = o, folglich, weil x = M die Gleichung F (x, y, c) = o auf c = B reducirt, so wird durch x = M auch F (x, y, B) = o in B = B verwandelt, welches anzeigt, dass x und y sich wechselseitig aufheben; anstatt aber x = M aus C = o abzuleiten, um den Werth davon in F (x, y, B) = o zu setzen, kann man die Werthe x = M und x = N aus den Gleichungen C = o und F (x, y, B) = o unter sich gleich setzen; und da die Werthe von x identisch sein müssen, so können wir daraus den Schluss ziehen, dass C = o nichts anders ist, als dasjenige, was F (x, y, c) = o sein würde, wenn man darin c und B verwechselte d. h. C = o ist ein particuläres Integral.

Im zweiten Falle, wo der Werth x = M das vollständige Integral auf c = fy reducirt, erhält man, wenn in diesem Integrale c mit fy verwechselt wird, F (x, y, fy) = o, welche Gleichung identisch wird, wenn man x durch M ersetzt, weil F (x, y, c) = o durch diesen Werth auf c = fy gebracht wird. Es folgt hieraus, dass die Werthe von x aus den Gleichungen x = M, und F (x, y, fy) = o identisch sein müssen, und dass daher dasselbe auch von diesen Gleichungen gilt; da die erste von ihnen dasselbe ist, wie C = o, diese Gleichung also im gegenwärtigen Falle das wird, was man aus F (x, y, c) = o erhält, wenn darin die Constante c für fy vertauscht wird; so kann man daraus abnehmen, dass C = o eine particuläre Auflösung ist.

437) Wir wollen nun von dieser Theorie auf die Aufsuchung besonderer Auflösungen, wenn das vollständige Integral gegeben ist, Anwendung machen. Es sei daher die Gleichung:

$$ydx - xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2} \ . \ . \ . \ (135),$$

dessen vollständiges Integral sich auf folgende Art be-

stimmen lässt. Man dividire nämlich diese Gleichung durch dx, und mache $\frac{dy}{dx} = p$, so erhält man:

$$y - px = a\sqrt{1 + p^2} \; . \; . \; . \; (136);$$

wird hinsichtlich x und p differenziirt, so ist:

$$dy - pdx - xdp = \frac{apdp}{\sqrt{1 + p^2}};$$

wird bemerkt, dass $dy = pdx$, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$xdp + \frac{apdp}{\sqrt{1 + p^2}} = o,$$

welcher Genüge geleistet wird, wenn $dp = o$. Diese Annahme giebt $p =$ *Constante* $= c$; durch diesen Werth wird die Gleichung (136) in folgende umgeformt:

$$y - cx = a\sqrt{1 + c^2} \; . \; . \; . \; (137).$$

Diese Gleichung, welche eine beliebige Constante c enthält, die sich jedoch in der gegebenen (135) nicht vorfindet, ist das vollständige Integral von dieser.

438) Nach diesem ergiebt sich der Theil Cdc der Gleichung (134) durch Differenziation der Gleichung (137) hinsichtlich c, welche als die einzige Veränderliche angesehen wird. Nach diesem Verfahren erhält man:

$$xdc + \frac{acdc}{\sqrt{1 + c^2}} = o;$$

folglich, wenn der Coëfficient von dc gleich Null gesetzt wird,

$$x = -\frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (138).$$

Um diesen Werth von c zu befreien, erhebe man die Gleichung zum Quadrat, und man erhält:

$$(1 + c^2)\, x^2 = a^2c^2,$$

woraus wiederum

$$c^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2}; \; 1 + c^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2}, \text{ und } \sqrt{1 + c^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

mit Hilfe dieser letztern Gleichung, wodurch aus (138) das Radical verschwindet, findet man:

$$c = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \; \ldots\ldots (139) \; *).$$

Werden dieser Werth und jener von $\sqrt{1 + c^2}$ in die Gleichung (137) gesetzt, so ist:

$$y + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

hieraus folgt:

$$y = \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - x^2};$$

wird zum Quadrat erhoben, so erhält man:

$$y^2 = a^2 - x^2,$$

woraus erhellet, dass diese Gleichung wirklich eine besondere Auflösung ist; denn wird sie differenziirt, so giebt sie $dy = -\frac{xdx}{y}$; werden dieser Werth und jener von $\sqrt{x^2 + y^2}$ in die Gleichung (135) substituirt, so wird diese dadurch auf $a^2 = a^2$ reducirt.

439) Clairaut war der Erste, der auf eine allgemeine Klasse Gleichungen aufmerksam machte, die einer besondern Auflösung fähig sind. Diese Gleichungen sind in der folgenden begriffen:

$$y = \frac{dy}{dx} x + F\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

welche sich auch so darstellen lässt

$$y = px + Fp \; \ldots\ldots (140);$$

durch Differenziation

$$dy = pdx + xdp + \frac{dFp}{dp} dp;$$

*) Wir haben unterlassen vor $\sqrt{1+c^2}$ das doppelte Zeichen zu setzen; denn wenn x und c entgegengesetzte Zeichen haben in der Gleichung (138), so muss dieses auch in der Gleichung (139) der Fall sein.

(Der Verfasser).

die sich wiederum, wegen $dy = pdx$, auf

$$xdp + \frac{dFp}{dp} dp = o$$

bringen lässt, welche dann wegen des gemeinschaftlichen Faktors dp auf folgende Art geschrieben werden kann:

$$\left(x + \frac{dF}{dp}\right) dp = o.$$

Dieser Gleichung wird durch $dp = o$ Genüge geleistet; da dann $p =$ Const. $= c$; wird dieser Werth in die Gleichung (140) eingeführt, so ist:

$$y = cx + Fc,$$

welche Gleichung das vollständige Integral der gegebenen ist, indem eine beliebige Constante c durch die Integration eingeführt wurde. Differenziirt man diese Gleichung hinsichtlich c, so findet man:

$$\left(x + \frac{dFc}{dc}\right) dc;$$

folglich, wenn der Coëfficient von dc gleich Null gesetzt wird,

$$x + \frac{dFc}{dc} = o,$$

welche Gleichung durch Substitution von dc in das vollständige Integral die besondere Auflösung geben wird.

Von den lineären Gleichungen.

440) Eine Differenzialgleichung zwischen zwei Veränderlichen x und y heisst *lineär*, wenn die Ausdrücke

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$$ in dieser Gleichung den ersten Grad nicht übersteigen. Sind also A, B, C, D, ... N, X Funktionen von x, so ist die lineäre Gleichung der n^{ten} Ordnung:

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n} = X. \quad (141).$$

441) Ist diese Gleichung vom ersten Grade, so beschränkt sie sich auf

$$Ay + B\frac{dy}{dx} = X;$$

entfernt man den Nenner, und dividirt durch B, so kann man dieser Gleichung folgende Form geben:

$$dy + Pydx = Qdx,$$

derer Integral, wie wir, Art. 385, gesehen haben, ist:

$$y = e^{-\int Pdx}\left[\int Qe^{\int Pdx}dx + C\right].$$

442) Ist der Theil X gleich Null in der Gleichung (141), und es wird eine Anzahl n besonderer Werthe, p, q, r, . . ., wovon jeder die Eigenschaft besitzt, der Gleichung Genüge zu leisten, nach und nach an die Stelle von y gesetzt; so braucht man nur p, q, r, . . . durch die willkührlichen Constanten a, b, c, ... zu vervielfachen, um daraus zu schliessen, dass das bestimmte vollständige Integral folgendes sei:

$$y = ap + bq + cr + \ldots\ldots$$

Da der Beweis dieses Satzes derselbe bleibt für alle Grade, so wollen wir nur die Gleichung

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} = o \ldots. (142)$$

betrachten. Schreibt man nach und nach die angenommenen Werthe p, q, r für y, so ist

$$Ap + B\frac{dp}{dx} + C\frac{d^2p}{dx^2} + D\frac{d^3p}{dx^3} = o,$$

$$Aq + B\frac{dq}{dx} + C\frac{d^2q}{dx^2} + D\frac{d^3q}{dx^3} = o,$$

$$Ar + B\frac{dr}{dx} + C\frac{d^2r}{dx^2} + D\frac{d^3r}{dx^3} = o;$$

multiplicirt man die erste dieser Gleichungen durch a, die zweite durch b, die dritte durch c, und addirt die Resultate, so erhält man:

$$A(ap+bq+cr)+B\left(a\frac{dp}{dx}+b\frac{dq}{dx}+c\frac{dz}{dx}\right)$$
$$+C\left(a\frac{d^2p}{dx^2}+b\frac{d^2q}{dx^2}+c\frac{d^2r}{dx^2}\right)+D\left(a\frac{d^3p}{dx^3}+b\frac{d^3q}{dx^3}+c\frac{d^3r}{dx^3}\right)=o.$$

Dieser Ausdruck ist offenbar mit Null gleichbedeutend, also derselbe, welchen man erhalten würde, wenn man in der Gleichung (142) $y = ap + bq + cr$ machte; folglich leistet dieser Werth von y der Gleichung (142) Genüge, ist mithin, da drei willkührliche Constanten sich in ihm vorfinden, das bestimmte vollständige Integral der Gleichung (142).

443) Im Falle X nicht Null ist in der Gleichung

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}=X\ldots(143),$$

und es lassen sich drei particuläre Werthe p, q, r auffinden, von denen jeder nach und nach für y gesetzt der Gleichung

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}=o\ldots(144)$$

Genüge leistet; so wird

$$y = ap + bq + cr \;\ldots\; (145)$$

das bestimmte vollständige Integral der Gleichung (143) sein. In diesem Falle sind a, b, c keine Constanten mehr, sondern Funktionen von x, derer Bestimmung wir bald kennen lernen werden.

444) Um diesen Lehrsatz zu beweisen, differenziire man erst die Gleichung (145) und dividire dann durch dx, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx}=a\frac{dp}{dx}+b\frac{dq}{dx}+c\frac{dr}{dx}+p\frac{da}{dx}+q\frac{db}{dx}+r\frac{dc}{dx}.$$

Man verfüge nun vermittelst dreier Bedingungen über die unbestimmten Grössen a, b, c, indem erstlich

$$p\frac{da}{dx}+q\frac{db}{dx}+r\frac{dc}{dx}=o\;\ldots\;(146)$$

gesetzt wird, alsdann bleibt noch übrig:

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{dp}{dx} + b\frac{dq}{dx} + c\frac{dr}{dx}.$$

Eine neue Differenziation giebt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{d^2p}{dx^2} + b\frac{d^2q}{dx^2} + c\frac{d^2r}{dx^2} + \frac{da}{dx}\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}\frac{dq}{dx} + \frac{dc}{dx}\frac{dr}{dx} \ldots (147).$$

Zur Erfüllung der zweiten Bedingung setze man:

$$\frac{da}{dx}\frac{dp}{dx} + \frac{db}{dx}\frac{dq}{dx} + \frac{dc}{dx}\frac{dr}{dx} = o \ldots (148),$$

alsdann bleibt noch:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{d^2p}{dx^2} + b\frac{d^2q}{dx^2} + c\frac{d^2r}{dx^2};$$

wird noch einmal differenziirt und durch dx dividirt, so ergiebt sich:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a\frac{d^3p}{dx^3} + b\frac{d^3q}{dx^3} + c\frac{d^3r}{dx^3} + \frac{da}{dx}\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{db}{dx}\frac{d^2q}{dx^2} + \frac{dc}{dx}\frac{d^2r}{dx^2}.$$

Um nun der dritten Bedingung Genüge zu leisten, nehmen wir an:

$$\frac{da}{dx}\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{db}{dx}\frac{d^2q}{dx^2} + \frac{dc}{dx}\frac{d^2r}{dx^2} = \frac{X}{D} \ldots (149),$$

und die vorhergehende Gleichung wird:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a\frac{d^3p}{dx^3} + b\frac{d^3q}{dx^3} + c\frac{d^3r}{dx^3} + \frac{X}{D}.$$

Ich behaupte nun, der Werth $y = ap + bq + cr$ leiste der Gleichung (143) Genüge. Denn schreibt man in diese Gleichung den Werth von y, wie auch die seiner Differenzial-Coëfficienten, die wir so eben kennen gelernt haben, und lässt die Glieder in X, welche sich aufheben, weg, so ergiebt sich:

$$A(ap + bq + cr) + B\left(a\frac{dp}{dx} + b\frac{dq}{dx} + c\frac{dr}{dx}\right)$$
$$+ C\left(a\frac{d^2p}{dx^2} + b\frac{d^2q}{dx^2} + c\frac{d^2r}{dx^2}\right) + D\left(a\frac{d^3p}{dx^3} + b\frac{d^3q}{dx^3} + c\frac{d^3r}{dx^3}\right) = o$$
$$\ldots\ldots (150).$$

445) Da man nicht weiss, ob vermöge des Werthes, welchen man dem y gegeben hat, alle Glieder der Gleichung (149) sich wechselseitig aufheben; so braucht nur noch bewiesen zn werden, dass diese Gleichung mit Null einerlei sei. Leisten nun p, q, r der Gleichung (144) Genüge, so hat man:

$$Ap + B\frac{dp}{dx} + C\frac{d^2p}{dx^2} + D\frac{d^3p}{dx^3} = o,$$

$$Aq + B\frac{dq}{dx} + C\frac{d^2q}{dx^2} + D\frac{d^3q}{dx^2} = o,$$

$$Ar + B\frac{dr}{dx} + C\frac{d^2r}{dx^2} + D\frac{d^3r}{dx^3} = o;$$

wird die erste dieser Gleichungen durch a, die zweite durch b, die dritte durch c multiplicirt, und die Resultate zusammengezählt, so findet man eine Gleichung, die mit Null identisch, und also eben das, was die Gleichung (150) sein wird.

446) Da die Differenzial-Coëfficienten $\frac{da}{dx}, \frac{db}{dx}, \frac{dc}{dx}$ nur im ersten Grade in den Bedingungsgleichungen (146), (148) und (149) vorkommen, so kann man bei Bestimmung von a, b, c zwei dieser Differenzial-Coëfficienten eliminiren, wodurch man den dritten als Funktion der Ausdrücke $\frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}, \ldots$ findet, welche bestimmte Funktionen von x sind, weil man p, q, r, ... kennt. Man hat daher Gleichungen von folgender Form:

$$\frac{da}{dx} = X_{,}; \quad \frac{db}{dx} = X_{,,}; \quad \frac{dc}{dx} = X_{,,,};$$

oder

$$da = X_{,}dx; \quad db = X_{,,}dx; \quad dc = X_{,,,}dx;$$

durch Integration lassen sich nun a, b, c bestimmen.

447) Dieser Lehrsatz ist auf die lineäre Gleichung irgend eines Grades anwendbar; die Integration dieser

Gleichungen kann also zurückgeführt werden auf die Integration von

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n} = o \ldots (151)$$

448) Wenn in der lineären Gleichung der Ordnung n constante Coëfficienten vorkommen, so ist es nicht schwer, davon das Integral zu bestimmen. Denn macht man in der Gleichung (151) $y = e^{mx}$, so ergiebt sich durch Differenziation:

$$\frac{dy}{dx} = e^{mx} m; \; \frac{d^2y}{dx^2} = e^{mx} m^2; \; \frac{d^3y}{dx^3} = e^{mx} m^3; \; \ldots$$

durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung (151) erhält man:

$$e^{mx}(A + Bm + Cm^2 + \ldots + Nm^n) = o \ldots (152);$$

sind nun m', m'', m''', ... die Wurzeln der Gleichung $A + Bm + Cm^2 + \ldots + Nm^2 = o \ldots (153)$, so geschieht der Gleichung (151) Genüge durch folgende Werthe:

$$y = e^{m'x}; \; y = e^{m''x}; \; y = e^{m'''x}; \; \ldots$$

und da man n Werthe von y hat, so ist:

$$y = ae^{m'x} + be^{m''x} + ce^{m'''x} + \ldots$$

das bestimmte vollständige Integral der Gleichung (151).

449) Ist $m' = m''$; so gehen die Glieder $ae^{m'x}$ und $be^{m''x}$ in $(a + b)\, e^{m'x}$ über; und da alsdann die Summe $a + b$ als eine einzige Constante zu betrachten ist, so finden sich nicht mehr n beliebige Constanten im Ausdrucke von y. Es ist aber schon bewiesen, dass in diesem Falle der Werth $y = xe^{m'x}$ der vorgegebenen Gleichung Genüge leisten werde, wenn dies durch $y = e^{m'x}$ geschieht. Man findet in der That durch Differenziation von $y = xe^{m'x}$:

$$\frac{dy}{dx} = m'xe^{m'x} + e^{m'x}; \; \frac{d^2y}{dx^2} = m'^2xe^{m'x} + 2m'e^{m'x};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m'^3xe^{m'x} + 3m'^2e^{m'x}; \; \ldots\ldots$$

durch diese Werthe wird die Gleichung (151) auf folgende reducirt:

$$xe^{m'x}(A + Bm' + Cm'^2 + Dm'^3 + \ldots)$$
$$+ e^{m'x}(B + 2Cm' + 3Dm'^2 + \ldots) \ldots (\ldots (154).$$

Da aber die Gleichung (153) vermöge der Voraussetzung zwei gleiche Wurzeln hat, und nach der Theorie der Gleichungen der Ausdruck $B + 2Cm + 3Dm^2 + \ldots$ eine Wurzel weniger enthält als der gegebene, und für $m = m'$ verschwindet, so folgt, dass der Ausdruck (154) gleich Null ist. Es wird daher durch $y = xe^{m'x}$ der Gleichung (151) Genüge geleistet, und man erhält für das vollständige Integral:

$$y = ae^{m'x} + bxe^{m'x} + ce^{m''x} + \ldots.$$

450) Gäbe es drei Wurzeln gleich m, so liesse sich auf ähnliche Art beweisen, dass der Gleichung (151) durch

$$y = e^{m'x} + xe^{m'x} + x^2e^{m'x}$$

Genüge geschehen würde; u. s. w.

451) Hat die Gleichung (153) imaginäre Wurzeln, und ist eine von ihnen $h + k\sqrt{-1}$, so ist die andere $h - k\sqrt{-1}$, und man hat in dem Werthe von y diese zwei Glieder:

$$ae^{hx+kx\sqrt{-1}} + be^{hx-kx\sqrt{-1}},$$

oder:

$$e^{hx}\left(ae^{kx\sqrt{-1}} + be^{-kx\sqrt{-1}}\right) \ldots (155).$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit den allgemeinen Formeln:

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} = \text{Cos.}\varphi + \text{Sin.}\varphi\sqrt{-1}\,;\; e^{-\varphi\sqrt{-1}}$$
$$= \text{Cos.}\,\varphi - \text{Sin.}\varphi\sqrt{-1},$$

so kann man:

$e^{kx\sqrt{-1}}$ durch $\text{Cos.}\,kx + \text{Sin.}\,kx\sqrt{-1}$

und

$e^{-kx\sqrt{-1}}$ durch $\text{Cos.}\,kx - \text{Sin.}\,kx\sqrt{-1}$

ersetzen, und die Gleichung (155) verwandelt sich alsdann in folgende:

$$e^{hx}[a\text{Cos.}kx + a\,\text{Sin.}kx\sqrt{-1} + b\text{Cos.}kx - b\text{Sin.}kx\sqrt{-1}],$$

welchem Ausdrucke man folgende Form geben kann:

$$e^{hx}[(a+b)\,\text{Cos.}\,kx + (a-b)\,\text{Sin.}\,kx\sqrt{-1}]\ (156).$$

Wann X in der Gleichung (141) Null ist, und a, b, c, Art. 142, beliebige Constanten sind, so lässt sich $a + b = c$, $a - b = c'\sqrt{-1}$ annehmen, alsdann verschwindet der imaginäre Theil in dem Ausdrucke (155).

Von der Integration, die sich an einer Anzahl von Gleichungen gleichzeitig verrichten lässt.

452) Es soll nun gezeigt werden, wie zwei oder mehrere Gleichungen sich auf einmal integriren lassen. Es seien daher:

$$\left.\begin{aligned} My + Nx + P\frac{dy}{dt} + Q\frac{dx}{dt} &= T \\ M'y + N'x + P'\frac{dy}{dt} + Q'\frac{dx}{dt} &= T' \end{aligned}\right\} \ldots (157).$$

die allgemeinsten Gleichungen des ersten Grades zwischen x und y und den Differenzial-Coëfficienten $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, und worin die Coëfficienten M, N, P, . . . Funktionen der unabhängigen Veränderlichen t sind. Diese Gleichungen lassen sich auch so darstellen:

$$(My + Nx)\,dt + Pdy + Qdx = Tdt;$$
$$(M'y + N'x)\,dt + P'dy + Q'dx = T'dt;$$

multiplicirt man die zweite durch eine Funktion ϑ von t und addirt das Resultat zur ersten, so ergiebt sich:

$$[(M + M'\vartheta)\,y + (N + N'\vartheta)\,x]\,dt$$
$$+ (P + P'\vartheta)\,dy + (Q + Q'\vartheta)\,dx = (T + T'\vartheta)\,dx;$$

bezeichnet man die Coëfficienten zwischen den kleinen

Klammern durch einzelne Buchstaben, so erhält diese Gleichung folgende Form:

$$Hydt + Kxdt + Rdy + Sdx = Tdt;$$

hieraus folgt:

$$H\left(y + \frac{K}{H}x\right)dt + R\left(dy + \frac{S}{R}dx\right) = Tdt \; (158),$$

welche Gleichung der Form nach mit

$$dy + Pydx = Q\,dx \; . \; . \; . \; . \; . \; (159)$$

die oben Art. 385, integrirt wurde, übereinstimmt, wenn

$$d\left(y + \frac{K}{H}x\right) = dy + \frac{S}{R}dx \; . \; . \; . \; (160);$$

denn alsdann wird durch

$$y + \frac{K}{H}x = z \; . \; . \; . \; . \; (161)$$

die Gleichung (158)

$$Hzdt + Rdz = Tdt,$$

oder:

$$dz + \frac{H}{R}zdt = \frac{T}{R}dt \; . \; . \; . \; . \; (162);$$

man sieht hieraus, dass die Form dieser Gleichung mit (158) übereinstimmend ist, da $\frac{H}{R}$ und $\frac{T}{R}$ Funktionen der unabhängigen Veränderlichen t sind.

453) Um der Gleichung (160) Genüge zu thun, braucht man nur

$$d\left(\frac{K}{H}x\right) = \frac{S}{R}dx$$

zu haben; wird die angezeigte Differenziation, nach Art. 14, verrichtet, so findet man:

$$\frac{K}{H}dx + xd.\frac{K}{H} = \frac{S}{R}dx.$$

Um dieser Gleichung Genüge zu leisten, müsse allgemein die Multiplicatoren von dx unter sich gleich und folglich das Glied $xd.\frac{K}{H}$ Null sein, d. h. man muss

$$\frac{K}{H} = \frac{S}{R} \text{ und } d.\frac{K}{H} = o \; . \; . \; . \; . \; (163)$$

haben. Setzt man in diese Gleichungen die Werthe der Buchstaben K, H, S und R, verrichtet die angezeigte Differenziation, und eliminirt ϑ, welches in diesen Gleichungen enthalten ist, so hat man die Relation, welche zwischen den Coëfficienten bestehen soll, damit der Bedingungsgleichung Genüge geschehe.

454) Im Falle die Coëfficienten der ersten Theile der Gleichungen (157) constant sind, und da das Differenzial einer Constante Null ist, so bleibt nur noch die erste der Gleichungen (163) übrig, welche hinreicht zur Bestimmung des Faktors ϑ, der alsdann als eine Funktion von Constanten ebenfalls constant ist. Führt man für K, H, R, S wiederum ihre Werthe ein; so hat man;

$$\frac{N + N'\vartheta}{M + M'\vartheta} = \frac{Q + Q'\vartheta}{P + P'\vartheta};$$

lässt man die Nenner verschwinden, so muss offenbar ϑ durch eine Gleichung vom zweiten Grade bestimmt werden; bezeichnet man durch ϑ' und ϑ'' die Werthe von ϑ, und nimmt an, dass die Coëfficienten von zdt und dt nach geschehener Substitution in die Gleichung (162) im ersten Falle p', q'; und im zweiten p'', q'' werden; so ist:

$$dz + p'zdt = q'dt,$$
$$dz + p''zdt = q''dt.$$

Wird nach der Formel (91) (Integralrechn.) integrirt, so ergiebt sich:

$$z = e^{-\int p'dt}\left[\int q' e^{\int p'dt} dt\right] + C'$$
$$z = e^{-\int p''dt}\left[\int q'' e^{\int p''dt} dt\right] + C''.$$

Aus der Gleichung (161) führe man den Werth von z in diese ein, so finden sich zwei Gleichungen in x, y und t ausgedrückt.

455) Wenn, ausgenommen T, T′, T″, die immer als Funktionen von t zu betrachten sind, die Coëfficien-

ten M, N, P, Q, . . . constant sind, und man die drei Gleichungen hat:

$$dy + (My + Nx + Pz)\,dt = Tdt,$$
$$dx + (M'y + N'x + P'z)\,dt = T'dt,$$
$$dz + (M''y + N''x + P''z)\,dt = T''dt,$$

so multiplicire man die zweite durch eine Constante ϑ, und die dritte durch eine Constante ϑ', addire die Resultate zur ersten, so entsteht eine Gleichung, die wir durch

$$dy + \vartheta dx + \vartheta' dz + Q\,(y + Rx + Sz)\,dt = Udt$$

darstellen wollen. Damit aber diese Gleichung die Form habe:

$$dy + Pydx = Qdx;$$

so muss, wenn $y + Rx + Sz$ als eine Funktion von y' betrachtet wird, das Differenzial dieser Funktion gleich sein $dy + \vartheta dx + \vartheta' dz$; diese Gleichheit hängt von folgenden Bedingungsgleichungen ab:

$$\vartheta = R;\ \vartheta' = S;$$

da vermöge der vorhergehenden Operationen R und S nur Funktionen von ϑ und ϑ' sind, so folgt, dass diese Gleichungen zur Bestimmung der verschiedenen Werthe der Constanten hinreichen.

456) Diese Methode ist allgemein, und lässt sich auf Differenzial-Gleichungen höherer Ordnungen anwenden, weil man diese Gleichungen auf den ersten Grad bringen kann. Hätte man z. B. die Gleichungen;

$$\frac{d^2y}{dt^2} + My + Nx + P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dx}{dt} = T,$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + M'y + N'x + P'\frac{dy}{dt} + Q'\frac{dx}{dt} = T',$$

oder vielmehr:

$$\left.\begin{array}{l} d^2y + (My + Nx)\,dt^2 + (Pdy + Qdx)\,dt = Tdt^2 \\ d^2x + (M'y + N'x)\,dt^2 + (P'dy + Q'dx)\,dt = T'dt^2 \end{array}\right\} \ldots (164)$$

und machte

$$dy = pdt;\ dx = qdt\ \ldots\ldots (165),$$

so würden diese Gleichungen, weil dt constant ist,

$$dp + (My + Nx + Pp + Qq)\,dt = Tdt,$$
$$dq + (M'y + N'x + P'p + Q'q)\,dt = T'dt;$$

auf diese beiden Gleichungen und jene (165), die alle vier vom ersten Grade sind, lässt sich das vorhergehende Verfahren anwenden.

Von der Integration einer Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung.

457) Die allgemeine Formel der Differenzial-Gleichungen der zweiten Ordnung mit zwei Veränderlichen ist:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = o \ldots . (166).$$

Wir wollen die Gleichung nicht in diesem Grade der Allgemeinheit integriren, sondern nur untersuchen, wie man zum Integral besonderer Fälle gelangen könne.

458) Betrachten wir erst also die Bedingung, vermöge welcher

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = o \ldots . (167).$$

Um diese Gleichung zu integriren, setze man $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, so erhält sie folgende Form:

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) \ldots . (168).$$

Lässt sich diese Gleichung integriren, und man nimmt daraus $p = X$, so ergiebt sich leicht der Werth von y. Denn die Gleichung $\frac{dy}{dx} = p$ giebt $y = \int pdx$; setzt man in diese Gleichung den Werth von p, so hat man $y = \int Xdx$. Gäbe aber die Gleichung (168) anstatt den Werth von p in x ausgedrückt, den Werth von x in p, so dass $x = P$; so integrire man theilweise $dy = pdx$; alsdann ist:

$$y = px - \int xdp;$$

wird hierin der Werth von x gesetzt, so findet sich:

$$y = px - \int Pdp.$$

459) Betrachten wir weiter den Fall, wo man hat:

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = o \ldots (169).$$

Es sei $\frac{dy}{dx} = p$, woraus $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$; wird für dx sein Werth $\frac{dy}{p}$ geschrieben, so wird diese Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{pdp}{dy}.$$

Werden die Werthe von $\frac{dy}{dx}$, und von $\frac{d^2y}{dx^2} = o$; in die Gleichung (169) gesetzt, so verwandelt sie sich in folgende:

$$f(y, p, dy, dp) = o;$$

giebt diese Gleichung $p = Y$, so substituire man diesen Werth in die Gleichung $dx = \frac{dy}{p}$, und man erhält nach geschehener Integration:

$$x = \int \frac{dy}{Y}.$$

Liesse sich hingegen y als Funktion von p bestimmen, so dass $y = P$; so erhielte man für x durch theilweise Integration der Gleichung $dx = \frac{dy}{p}$ folgenden Werth:

$$x = \frac{y}{p} + \int y \frac{dp}{p^2};$$

wird in diese Gleichung der Werth von y substituirt, so hat man:

$$x = \frac{y}{p} + \int P \frac{dp}{p^2};$$

wird integrirt, so lässt sich p hernach mit Hilfe der Gleichung $y = P$ eliminiren.

460) Wenn die Gleichung (166) nebst $\frac{d^2y}{dx^2}$ nur eine

der drei Grössen $\frac{dy}{dx}$, x, y enthält; so hat man im ersten Falle:

$$f\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = o \text{ } (170);$$

macht man $\frac{dy}{dx} = p$, folglich $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$; und substituirt diese Werthe in die Gleichung (170), so ergiebt sich:

$$f\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = o.$$

Aus dieser Gleichung leitet man ab:

$$\frac{dp}{dx} = P \text{ } (171),$$

folglich

$$x = \int \frac{dp}{P} \text{ . . . , . . . } (172).$$

Auf der andern Seite giebt die Gleichung $\frac{dy}{dx} = p$ folgenden Werth:

$$y = \int p dx;$$

wird hierin der Werth von dx aus der Gleichung (171) substituirt, so erhält man:

$$y = \int \frac{pdp}{P} \text{ } (173).$$

Nach geschehener Integration der Gleichungen (172) und (173) eliminire man aus ihnen die Grösse p, um eine Gleichung in x und y zu bekommen.

461) Im Falle $\frac{d^2y}{dx^2}$ nicht mit einer Funktion von x in Verbindung angetroffen wird, so hat man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = X;$$

wird durch dx multiplicirt, und alsdann integrirt, so ist:

$$\frac{dy}{dx} = \int X dx + C;$$

wird von neuem durch dx multiplicirt, und wiederum integrirt, so ergiebt sich:

$$y = \int X'dx + Cx + C'.$$

462) Ist nun $\frac{d^2y}{dx^2}$ als eine Funktion von y gegeben, so hat man die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Y$$

zu integriren. Um zu diesem Ziele zu gelangen, multiplicire man sie durch 2dy, und man erhält:

$$2\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 2Ydy.$$

Da der erste Theil dieser Gleichung wie das Differenzial von x^2 zusammengesetzt ist, so ergiebt sich durch Integration:

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \int 2Ydy + C;$$

wird die Quadratwurzel ausgezogen,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C + 2\int Ydy},$$

hieraus folgt durch eine neue Integration:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int Ydy}} + C'.$$

Von den Gleichungen mit partiellen Differenzialen der ersten Ordnung.

463) Eine Gleichung, welche besteht zwischen Differenzial-Coëfficienten, die nach Umständen mit Veränderlichen und Constanten verbunden vorkommen, heisst man im Allgemeinen eine *partielle Differenzialgleichung*, oder nach der alten Benennung, eine *Gleichung mit partiellen Differenzen.* Man hat diese Art Gleichungen desswegen so genannt, weil die Bezeichnung der darin enthaltenen Differenzial-Coëfficienten andeutet, Art. 52, dass die Differenziation nur theilweise, d. i. nur dadurch

verrichtet werden könne, indem man gewisse Veränderlichen als constant betrachtet, also unterstellt, dass in der gegebenen Funktion nur eine Grösse veränderlich sei. Grösserer Einfachheit willen wollen wir nur zwei Veränderlichen annehmen, und nur solche partiellen Differenzialgleichungen betrachten, worin einer oder mehrere Differenzial-Coëfficienten der ersten Ordnung vorkommen.

464) Wir wollen daher mit der Integration folgender Gleichung den Anfang machen. Es sei

$$\frac{dz}{dx} = a;$$

wenn z gegen die Voraussetzung statt eine Funktion von x und y zu sein, nur x enthielte, so hätte man nichts weiter als die gewöhnliche Differenzialgleichung, welche durch Integration zur ursprünglichen $z = ax + c$ führen würde. Da aber im gegenwärtigen Falle z eine Funktion von x und y ist, so mussten die in z enthaltenen y bei der Differenziation verschwinden, weil während dieses Geschäfts y als beständig betrachtet wurde; dieselbe Voraussetzung muss nun auch bei der Integration beibehalten und die willkührliche Constante überhaupt als eine Funktion von y angenommen werden; das Integral der vorgegebenen Gleichung ist mithin:

$$z = ax + \varphi y.$$

465) Man suche ferner die partielle Differenzialgleichung:

$$\frac{dz}{dx} = X$$

zu integriren, worin X eine Funktion von x ist. Multiplicirt man durch dx, und integrirt hierauf, so ist:

$$z = \int X dx + \varphi x.$$

466) Wäre z. B. $x^2 + a^2$ die durch X vorgestellte Funktion, so hätte man als Integral:

$$z = \frac{x^3}{3} + a^2 x + \varphi x.$$

467) Die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = Y$$

zu integriren, wird nun keine Schwierigkeit mehr haben; es ist nämlich:

$$z = Yx + \varphi x.$$

468) Auf dieselbe Art kann man jede Gleichung integriren, in welcher $\frac{dz}{dx}$ einer Funktion zweier Veränderlichen x und y gleich sein wird. Hat man z. B.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{ay + x^2}},$$

so multiplicire man erst durch dx, und integrire, Art. 271, indem y als constant betrachtet wird; bezeichnet nun φy die Constante, welche man dem Integral anhängen muss; so ergiebt sich:

$$z = \sqrt{ay + x^2} + \varphi y.$$

469) Will man letzlich die Gleichung

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

integriren, so betrachte man y als constant, und so ist, Art. 274:

$$z = \text{Bog.}\left(\text{Sin.} = \frac{x}{y}\right) + \varphi y.$$

470) Um nun allgemein

$$dz = F(x, y)\, dx$$

zu integriren, nehme man das Integral hinsichtlich x und addire hierauf, um es zu ergänzen, eine constante Funktion von y hinzu; man findet hiedurch:

$$z = \int F(x, y)\, dx + \varphi y.$$

Obgleich nach *Fontaine's* Bezeichnung die gegebene Gleichung auch auf folgende Art hätte geschrieben werden können, nämlich:

$$\frac{dz}{dx} = F(x, y),$$

um anzuzeigen, dass blos allein x als veränderlich zu betrachten sei; so wollten wir doch davon hier keinen Gebrauch machen, weil nach dem Vorhergehenden und nach der Natur des zweiten Theils der Gleichung $dz = F(x, y) dx$ Niemand mehr über die Hypothese, in welcher das Differenzial dz zu nehmen ist, im Zweifel sein kann. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die Gleichung des Art. 469.

471) Aus dem Vorangehenden ist einleuchtend, dass das nämliche Verfahren, wie bei gewöhnlichen Differenzialgleichungen anwendbar ist, wenn eine der Veränderlichen constant, und die in das Integral einzuführende Constante als Funktion dieser Veränderlichen angenommen wird.

472) Betrachten wir nun Differenzialgleichungen mit Differenzial-Coëfficienten der ersten Ordnung, nämlich:

$$M.\frac{dz}{dx} + N\frac{dz}{dy} = o,$$

worin M und N gegebene Funktionen von x und y bezeichnen; hieraus folgt:

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{Mdz}{Ndx};$$

durch Substitution dieses Werthes in die Formel:

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy \dots (174),$$

derer Bedeutung keine andere ist, als die Bedingung zu bezeichnen, dass z eine Funktion von x und y ist, ergiebt sich folgende Gleichung:

$$dz = \frac{dz}{dx}\left(dx - \frac{M}{N} dy \right),$$

oder:

$$dz = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{Ndx - Mdy}{N}.$$

Es sei λ der Faktor, wodurch $Ndx - Mdy$ ein vollständiges Differenzial ds wird; alsdann ist:

$$\lambda (Ndx - Mdy) = ds \dots (175).$$

Vermittelst dieser Gleichung eliminire man Ndx — Mdy aus der vorhergehenden, und man erhält:

$$dz = \frac{1}{\lambda N} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot ds.$$

Da $\frac{dz}{dx}$ eine unbestimmte Grösse ist, so kann man ihr immer einen Werth beilegen, dass $\frac{1}{\lambda N} \frac{dz}{dx}$ ds integrabel werde, welches dedurch bezweckt wird, wenn $\frac{1}{\lambda N} \cdot \frac{dz}{dx}$ eine Funktion von s ist; denn das Differenzial einer jeden Funktion von s muss ja die Form Fs.ds haben. Hieraus folgt also nothwendigerweise

$$\frac{1}{\lambda N} \frac{dz}{dx} = Fs,$$

durch welche Gleichung die vorige sich in diese verwandelt:

$$dz = Fs \,.\, ds,$$

woraus:

$$z = \varphi s \;.\;.\;.\;.\;.\; (176).$$

473) Wird durch diesen Kunstgriff die Gleichung

$$x \frac{dz}{dy} - y \frac{dz}{dx} = o \;.\;.\;.\;.\; (177)$$

integrirt; so ist $M = -y$, $N = x$, und folglich die Gleichung (175)

$$ds = \lambda\,(xdx + ydy).$$

Es ist klar, dass der Faktor λ, durch welchen der zweite Theil dieser Gleichung integrabel wird, *zwei* ist; substituirt man also diesen Werth von λ und integrirt, so ist:

$$s = x^2 + y^2;$$

führt man diesen Werth in die Gleichung (176) ein, so findet sich das Integral der Gleichung (177), nämlich:

$$z = \varphi\,(x^2 + y^2).$$

474) Es sei nun die Gleichung:

$$P \frac{dz}{dx} + Q \frac{dz}{dy} + R = 0 \; . \; . \; . \; (178),$$

worin P, Q, R Funktionen von x, y, z sind; wird durch P dividirt, und $\frac{Q}{P} = M$; $\frac{R}{P} = N$ gesetzt; so erhält die gegebene Gleichung folgende Form:

$$\frac{dz}{dx} + M \frac{dz}{dx} + N = 0 \; . \; . \; . \; (179);$$

macht man $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$; so ist:

$$p + Mq + N = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (180),$$

wodurch eine gewisse Beziehung zwischen den Coëfficienten p und q der allgemeinen Formel

$$dz = pdx + qdy \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (181)$$

festgesetzt wird, weil sonst p und q völlig willkührlich in dieser Formel wären; denn sie soll nach einer schon einmal gemachten Bemerkung nur anzeigen, dass z eine Funktion von x und y sei, und dass diese Funktion nach Gefallen genommen werden könne; p und q müssen also in der Gleichung (181) als zwei unbestimmte Grössen angesehen werden. Eliminirt man p vermittelst der Gleichung (180), so ergiebt sich:

$$dz + Ndx = q\,(dy - Mdx) \; . \; . \; . \; (182),$$

und q wird immer unbestimmt bleiben. Man weiss aber, dass bei dieser Art Gleichungen, was auch q bedeuten möge, immer abgesondert sein müsse:

$$dz + Ndx = 0; \; dy - Mdx = 0 \; . \; . \; . \; (183),$$

(vergl. Note 2.)

475) Wenn P, Q und R nur die Veränderliche x enthalten, so gilt dies auch von M und N; alsdann ist die zweite der Gleichungen (183) eine Gleichung mit zwei Veränderlichen x und y, und kann vermittelst des Faktors λ ein vollständiges Differenzial werden; nennt mau es ds, so hat man:

$$ds = \lambda\,(dy - Mdx) \; . \; . \; . \; . \; (184).$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung den Werth von $dy - Mdx$, und substituirt ihn, wie auch den von q in die Gleichung (182), so findet man:

$$dz = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{ds}{\lambda} - Ndx \; . \; . \; . \; . \; (185).$$

Auf der andern Seite giebt die integrirte Gleichung (184), welche nur in ihrem zweiten Theile x und y enthält,

$$s = F\,(x,\, y);$$

wird der Werth von y aus dieser Gleichung in (185) gesetzt, so bringt man dadurch den zweiten Theil auf eine Funktion der Veränderlichen x und s. Integrirt man hinsichtlich x, nach Art. 47, setzt das Integrationszeichen dem Gliede vor, worin das Differenzial dx vorkömmt, und addirt eine constante Funktion der andern Veränderlichen s dazu, so ergiebt sich:

$$z = -\int Ndx + \varphi s \; . \; . \; . \; (186).$$

Diesen Werth von z hätte man auch durch Anwendung der Gleichungen (183) erhalten. In der That, wenn die zweite von ihnen integrirt wird, so ist $F\,(x, y) = s$; durch s wird eine Veränderliche s bezeichnet, welche als constant betrachtet, bei der Differenziation hat verschwinden können, welches auch unmittelbar aus der Integration der Gleichung (184) hervorgeht. Denn da der Werth des Differenzials ds Null ist, so muss s eine beständige Grösse sein. Nach dieser Bemerkung liefert die Gleichung $F\,(x,\, y) = s$ den Werth $y = f\,(x,\, s)$. Substituirt man diesen Werth von y in die erstere der Gleichungen (183), oder was dasselbe ist, betrachtet man y als eine Funktion von x und der als constant behandelten Grösse s in der erstern der Gleichungen (183), so findet man:

$$z = -\int Nx + \varphi x.$$

476) Um von dieser Integration ein Beispiel zu geben, sei:

$$x\,\frac{dz}{dx} + y\,\frac{dz}{dy} = a\,\sqrt{x^2 + y^2},$$

wo

$$M = \frac{y}{x},\ N = -a\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}.$$

Wird der Werth von M in die Gleichung (184) eingeführt, so verwandelt sie sich in

$$ds = \lambda\left(dy - \frac{y}{x}dx\right)$$

oder vielmehr in

$$ds = \lambda\left(\frac{xdy - ydx}{x}\right),$$

welche Gleichung für $\lambda = \frac{1}{x}$, Art. 19, integrabel ist; man erhält alsdann:

$$s = \frac{y}{x}.$$

Wird nun der Werth von s und der von N in die Gleichung (186) eingeführt, so ergiebt sich:

$$z = a\int dx\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} + \varphi\frac{y}{x},$$

oder vielmehr:

$$z = a\int dx\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \varphi\frac{y}{x}.$$

Die hier nur angezeigte Rechnung lässt sich auf folgende Weise vollenden. Da $\frac{y}{x}$ nichts anders, als eine Funktion von s ist, die man als constant in dieser Integration ansieht, so hat man:

$$z = a\int dx\sqrt{1+s^2} + \varphi\frac{y}{x} = ax\sqrt{1+s^2} + \varphi\frac{y}{x}.$$

Setzt man für s wiederum seinen Werth, so erhält man:

$$z = a\sqrt{x^2+y^2} + \varphi\frac{y}{x},$$

zu welchem Resultate man noch weit schneller gelangte,

wenn man den Werth von N und von y in die Gleichung (186) einführte; denn man erhielte:

$$z = a\int dx \frac{\sqrt{x^2 + s^2x^2}}{x} = ax\sqrt{1 + s^2} + \varphi s;$$

wird der Werth von s gesetzt und reducirt, so ergiebt sich:

$$z = a\sqrt{x^2 + y^2} + \varphi \frac{y}{x}.$$

477) Es kann sich ereignen, dass in dem allgemeinen Falle, wo die Coëfficienten P, Q, R der Gleichung (178) die drei Veränderlichen x, y, z enthalten, in jeder von den Gleichungen (183) nur jene zwei Veränderlichen vorkommen, welche offenbar darin enthalten sind, und sie sich also unter folgende Form bringen lassen:

$$dz = f(x, z)\,dx = o;\; dy = F(x, y)\,dx.$$

Man kann diese Gleichungen nicht einzeln integriren, wenn man wie Art. 470, schreibt:

$$z = \int f(x, z)\,dx + \varphi z;\; y = \int F(x, y)\,dx + \varphi y,$$

denn alsdann müsste man offenbar z in der ersten und y in der zweiten Gleichung constant annehmen, was sich widerspricht, weil keine der drei Coordinaten x, y, z in der ersten Gleichung constant sein kann, ohne es auch zugleich in der zweiten zu sein.

478) Die Gleichungen (183) lassen sich auf folgende Art integriren, im Falle jede nur zwei in ihr gegebene Veränderlichen enthält. Es seien μ und λ Faktoren, wodurch die Gleichungen (183) vollständige Differenziale werden. Wenn man diese Differenziale durch dU und durch dV bezeichnet, so hat man:

$$\lambda\,(dz + Ndx) = dU,$$
$$\mu\,(dy - Mdx) = dV;$$

vermittelst dieser Werthe geht die Gleichung (182) in folgende über:

$$dU = q\,\frac{\lambda}{\mu}\,dV \;\ldots\ldots\; (187).$$

Indem der erste Theil dieser Gleichung ein vollständiges Differenzial ist, so muss dies auch vom zweiten gelten,

d. h. $q\frac{\lambda}{\mu}$ muss eine Funktion von V sein; wird sie durch φV ausgedrückt, so wird die Gleichung (187)

$$dU = \varphi V \cdot dV;$$

hieraus folgt durch Integration:

$$U = \varphi V.$$

479) Es sei z. B. die Gleichung

$$xy\frac{dz}{dx} + x^2\frac{dz}{dy} = yz;$$

wird sie so geschrieben:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{x}{y}\cdot\frac{dz}{dy} - \frac{z}{x} = o,$$

so lässt sie sich mit der Gleichung (179) vergleichen, da alsdann

$$M = \frac{x}{y},\ N = -\frac{z}{x};$$

durch diese Werthe werden die Gleichungen (183)

$$dz - \frac{z}{x}dx = o;\ dy - \frac{x}{y}dx = o.$$

Entfernt man die Nenner, so ist

$$xdz - zdx = o;\ ydy - xdx = o.$$

Die Faktoren, wodurch diese Gleichungen integrabel werden, sind $\frac{1}{x^2}$ und 2; werden sie substituirt, und dann integrirt, so findet man $\frac{z}{x}$, und $y^2 - x^2$ zu Integralen. Werden nun diese Werthe statt U und V in der Gleichung $U = \varphi V$ gesetzt, so ergiebt sich das Integral der gegebenen:

$$\frac{z}{x} = \varphi(y^2 - x^2).$$

480) Es ist zu bemerken, dass wenn man q statt p eliminirt hätte, die Gleichungen (183) durch folgende ersetzt worden wären:

$$Mdz + Ndy = o;\ dy - Mdx = o\ .\ .\ .\ .\ (188).$$

Da nun alles, was von den Gleichungen (183) gesagt wurde, sich auch auf diese anwenden lässt, so folgt daraus, dass, im Falle die erste der Gleichungen (183) nicht integrabel wäre, man mit Recht diese Gleichungen durch jene (188) ersetzen könne, welches dahinausläuft, die erste der Gleichungen (188) an die Stelle der ersten der Gleichungen (183) zu schreiben, woraus man alsdann sehen wird, ob die Integration möglich ist, oder nicht.

481) Hätte man z. B.

$$az\frac{dz}{dx} - zx\frac{dz}{dy} + xy = o;$$

so wäre, wenn diese Gleichung durch az dividirt und alsdann mit der Gleichung (179), verglichen würde,

$$M = -\frac{x}{a}; \; N = \frac{xy}{az};$$

folglich die Gleichungen (183)

$$dz + \frac{xy}{az}dx = o; \; dy + \frac{x}{a}dx = o;$$

entfernt man die Nenner, so hätte man:

$$azdz + xydx = o; \; ady + xdx = o \ldots (189).$$

Die erste dieser Gleichungen, drei Veränderlichen enthaltend, lässt sich nicht unmittelbar integriren; man ersetze sie daher durch die erste der Gleichungen (188), und man erhält statt der Gleichungen (189) folgende:

$$-\frac{x}{a}dz + \frac{xy}{az}dy = o; \; ady + xdx = o.$$

Lässt man den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{x}{a}$ in der ersten dieser Gleichungen weg, und multiplicirt die eine durch 2z, die andere durch 2, so findet man:

$$-2zdz + 2ydy = o; \; 2ady + 2xdx = o,$$

die Integrale dieser Gleichungen sind:

$$y^2 - z^2 \text{ und } 2ay + x^2;$$

werden nun diese Werthe für U und V gesetzt, so ergiebt sich:

$$y^2 - z^2 = \varphi\,(2ay + x^2).$$

482) Man bemerke, dass die erstere der Gleichungen (188) nichts anders ist, als das Resultat der Elimination von dx aus den Gleichungen (183).

Man kann im Allgemeinen jede in den Coëfficienten M und N enthaltene Veränderliche eliminiren, und mit einem Worte, auf irgend eine Art diese Gleichungen combiniren; erhält man nach vollendetem Geschäfte zwei Integrale, wie $U = a$, und $V = b$, wo a und b zwei beliebige Constanten sind, so lässt sich immer daraus schliessen, dass $U = \varphi V$ das Integral ist. Nimmt man wirklich b nach Gefallen, was geschehen kann, indem a und b zwei beliebige Constantan sind; so lässt sich a aus b auf irgend eine Art zusammensetzen, d. h. mit andern Worten, man kann für a eine Funktion von b nehmen; die Bedingung wird durch $a = \varphi b$ angezeigt, (achte Note). Man hat daher die Gleichungen $U = \varphi b$, $V = b$, in welchen x, y, z die nämlichen Coordinaten bedeuten. Eliminirt man aus diesen Gleichungen b, so erhält man $U = \varphi V$.

Man kann noch bemerken, dass, wenn $V = b$ gemacht wird, jene Gleichung ausdrückt, man soll haben $U = \varphi b = Const.$, d. h. U und V sind zugleich constant, ohne dass a und b voneinander abhängen, weil die Funktion φ willkührlich ist; dies ist aber gerade die Bedingung, welche durch die Gleichungen $U = a$, $V = b$ gegeben ist.

483) Um von diesem Satze eine Anwendung zu zeigen, sei

$$zx\frac{dz}{dx} - zy\frac{dz}{dy} - y^2 = o.$$

Hat man durch zx dividirt, und das Resultat mit der Gleichung (179) verglichen, so ist

$$M = -\frac{y}{x},\ N = -\frac{y^2}{zx};$$

hierdurch verwandeln sich die Gleichungen (183) in

$$dz - \frac{y^2}{zx}dx = o,\ dy + \frac{y}{x}dx = o,$$

oder

$$zxdz - y^2dx = o;\ xdy + ydx = o;$$

die erstere von diesen Gleichungen enthält drei Veränderlichen, man braucht sich also nicht zu bemühen, sie in diesem Zustand zu integriren. Wird aber darin der Werth von ydx aus der zweiten substituirt, so erhält sie einen gemeinschaftlichen Faktor x, durch dessen Aufhebung sie auf folgende reducirt wird:

$$zdz + ydy = o;$$

diese Gleichung, durch 2 multiplicirt, wird offenbar integrabel; da die andere es schon ist, so findet man nach geschehener Integration:

$$z^2 + y^2 = a;\ xy = b;$$

hieraus lässt sich schliessen, dass

$$z^2 + y^2 = \varphi xy.$$

484) Wir wollen nun das, was sich über die partiellen Differenzialgleichungen sagen lässt, mit der Auflösung der folgenden Aufgabe beschliessen: *Es sei eine Gleichung gegeben, welche eine willkührliche Funktion einer oder zweier Veränderlichen enthält, man soll die partielle Differenzialgleichung finden, woraus sie entstanden ist.*

Nimmt man an, es sei

$$z = F\,(x^2 + y^2);$$

so mache man

$$x^2 + y^2 = u \;\ldots\ldots\; (190),$$

und die gegebene Gleichung wird

$$z = Fu;$$

da das Differenzial von z im Allgemeinen eine Funktion von u vervielfacht durch du sein soll, so kann man auch schreiben:

$$dz = \varphi u du;$$

nimmt man das Differenzial allein hinsichtlich x, und betrachtet y als constant, so muss man auch das Differenzial von u in dieser Voraussetzung nehmen; wenn man folglich die vorige Gleichung durch dx dividirt, so ist

$$\frac{dz}{dx} = \varphi u \frac{du}{dx} \;\ldots\ldots\; (191).$$

Betrachtet man nun x als beständig, und y als veränderlich, so findet man durch ein dem vorigen ähnliches Verfahren:

$$\frac{dz}{dy} = \varphi u \frac{du}{dy} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (192);$$

die Werthe der Differenzial-Coëfficienten $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$, die in den Gleichungen (191) und (192) sich vorfinden, werden durch wiederholte Differenziation der Gleichung (190) hinsichtlich x und y erhalten; man hat daher

$$\frac{du}{dx} = 2x; \; \frac{du}{dy} = 2y;$$

substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (190) und (191), so hat man:

$$\frac{dz}{dx} = 2x\varphi u; \; \frac{dz}{dy} = 2y\varphi u;$$

wird φu aus diesen beiden Gleichungen eliminirt, so ist endlich:

$$y \frac{dz}{dx} = x \frac{dz}{dy}.$$

485) Es sei ferner

$$z^2 + 2ax = F(x - y)$$

gegeben. Macht man

$$x - y = u \;.\;.\;.\;.\;. (193),$$

so wird diese Gleichung

$$z^2 + 2ax = Fu;$$

durch Differenziation ergiebt sich

$$d(z^2 + 2ax) = \varphi u du;$$

wird das angezeigte Differenzial hinsichtlich x genommen, z wegen des darin enthaltenen x als veränderlich betrachtet, und durch dx dividirt, so erhält man:

$$2z \frac{dz}{dx} + 2a = \varphi u \frac{du}{dx} \;.\;.\;.\;. (194).$$

Verfährt man eben so hinsichtlich y, indem man z als

eine Funktion betrachtet, die nur wegen y variirt, und dividirt durch dy, so findet man:

$$2z \frac{dz}{dy} = \varphi u \frac{du}{dy} \; . \; . \; . \; . \; . \; (195).$$

Zur Elimination der Differenzial-Coëfficienten von du liefert die Gleichung (193):

$$\frac{du}{dx} = 1; \frac{du}{dy} = -1;$$

werden diese Werthe in die Gleichungen (194) und (195) substituirt, so erhält man:

$$2z \frac{dz}{dx} + 2a = \varphi u; \; 2z \frac{dz}{dy} = -\varphi u;$$

wird φu aus diesen Gleichungen eliminirt, so ist

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} + \frac{a}{z} = o.$$

Gleichungen mit partiellen Differenzialen der zweiten Ordnung.

486) Eine partielle Differenzialgleichung der zweiten Ordnung, worin z eine Funktion von zwei Veränderlichen, x und y, ist, muss immer einen oder mehrere Differenzial-Coëfficienten $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dy^2}, \frac{d^2z}{dxdy}$ unabhängig von den Differenzial-Coëfficienten der ersten Ordnung, welche darin vorkommen können, enthalten.

487) Wir wollen uns nur auf die Integration der einfachsten partiellen Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung beschränken, und mit folgender den Anfang machen, nämlich mit

$$\frac{d^2z}{dx^2} = o.$$

Wird durch dx multiplicirt, dann hinsichtlich x integrirt, und dem Integrale eine beliebige constante Funktion von y zugesetzt, so hat man:

$$\frac{dz}{dx} = \varphi y;$$

wird noch einmal durch dx vervielfacht und durch ψy eine dem Integrale zuzusetzende Funktion von y bezeichnet, so ist:

$$z = x\varphi y + \psi y.$$

488) Man suche nun die Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} = P$$

zu integriren, worin P eine Funktion von x und von y ist. Wird wie in der vorhergehenden Integration verfahren, so erhält man:

$$\frac{dz}{dx} = \int P dx + \varphi y;$$

eine zweite Integration giebt

$$z = \int [\int P dy + \varphi x] dx + \psi y.$$

489) Auf dieselbe Weise würde man

$$\frac{d^2z}{dy^2} = P$$

integriren, und finden:

$$z = \int [\int P dy + \varphi x] dy + \psi x.$$

490) Die Gleichung

$$\frac{d^2z}{dydx} = P$$

lässt sich erst hinsichtlich einer der Veränderlichen, und dann auch hinsichtlich der andern integriren; hiedurch erhält man:

$$z = \int [\int P dx + \varphi y] dy + \varphi x.$$

491) Auf dieselbe Art wird man eine der folgenden Gleichungen integriren:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = P; \quad \frac{d^n z}{dx dy^{n-1}} = Q; \quad \frac{d^n z}{dx^2 dy^{n-2}} = R, \ldots.$$

worin P, Q, R, ... Funktionen von x und y sind. Dies giebt zu einer Reihe von Integrationen Veranlassung; bei einer jeden wird eine beliebige Funktion in das Integral gebracht.

492) Unter den so eben betrachteten Gleichungen, ist unstreitig folgende am leichtesten zu integriren:

$$\frac{d^2z}{dy^2} + P\frac{dz}{dy} = Q,$$

wo durch P und Q immer zwei Funktionen von x und y angezeigt werden. Macht man $\frac{dz}{dy} = u$, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in folgende:

$$\frac{du}{dy} + Pu = Q \ldots (196).$$

Um zu integriren, betrachte man x als constant, da dann diese Gleichung nur noch zwei Veränderlichen y und u enthält, und wird dieselbe Form haben, wie die Gleichung:

$$dy + Pydx = Qdx \ldots . (197),$$

von der im Art. 385 gehandelt wurde, und derer Integral:

$$y = e^{-\int Pdx}\left[\int Qe^{\int Pdx}dx + C\right] \ldots . (198).$$

Vergleicht man nun die Gleichungen (196) und (197) mit einander, so ergiebt sich:

$$y = u;\ x = y;$$

werden diese Werthe in die Formel (198) eingeführt, und C in φx verwandelt, so erhält man:

$$u = e^{-\int Pdy}\left[\int Qe^{\int Pdy}dy + \varphi x\right];$$

schreibt man diesen Werth von u in die Gleichung $\frac{dz}{dy} = u$, multiplicirt durch dy, und integrirt, so wird man finden:

$$z = \int\left[e^{-\int Pdy}(\int Qe^{\int Pdy}dy + \varphi x\right]dy + \psi x.$$

493) Durch dieselben Hilfsmittel könnte man auch die Gleichungen integriren:

$$\frac{d^2z}{dxdy} + P\frac{dz}{dx} = Q;\ \frac{d^2z}{dxdz} + P\frac{dz}{dy} = Q,$$

worin P und Q Funktionen von x bezeichnen; aus dem

Divisor dxdy kann man leicht abnehmen, dass in dem Werthe von z keine beliebigen Funktionen der nämlichen Veränderlichen mehr enthalten sind.

Von Bestimmung der willkührlichen Funktionen, welche in die Integrale der Differenzialgleichungen mit partiellen Differenzialen aufgenommen werden.

494) Die willkührlichen Funktionen, womit die Integrale der Differenzialgleichungen mit partiellen Differenzialen ergänzt werden, lassen sich nur bedingungsweise bestimmen; diese Bedingungen sind an die Natur der Aufgaben geknüpft, welche zu solchen Gleichungen Veranlassung gegeben haben. Die meisten dieser Probleme gehören der physischen Mathematik an. Da wir uns aber nicht von unserem Gegenstande entfernen, und uns blos auf rein-analystische Betrachtungen beschränken wollen, so sei unser erstes Bestreben, zu untersuchen, welches die in der Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = a \;.\;.\;.\;.\; (199)$$

enthaltenen Bedingungen sind.

495) Sobald z eine Funktion von x und y ist, so kann sie als die Gleichung einer Fläche angesehen werden. Dieser Fläche kömmt vermöge der Natur ihrer Gleichung die Eigenschaft zu, dass $\frac{dz}{dx}$ immer eine constante Grösse sein muss. Es folgt hieraus, dass jeder Schnitt, EF, Fig. 87, durch eine Ebene CD, parallel zur Ebene von (x, z), eine gerade Linie ist. Denn von welcher Beschaffenheit auch dieser Schnitt sein mag, so kann man ihn in unendlich viele Theile mm′, m′m″, m″m‴, ... theilen, welche wegen ihrer allzugeringen Ausdehnung als gerade Linien angesehen werden, und die Elemente des Schnittes bezeichnen können. Macht nun eines dieser Elemente mm′ mit einer zur Axe der Abscissen parallelen Graden mn

einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente durch $\frac{dz}{dx}$ bezeichnet ist; so folgt, dass wegen dieses beständigen Winkels, alle Winkel m′mn, m″m′n′, m‴m″n″, ... gebildet durch die Curvenelemente und die zur Axe der Abscissen Parallelen mn, m′n′, m″n″,... unter sich gleich sind; *der Schnitt EF ist daher eine gerade Linie.*

496) Man gelangte zu demselben Resultate durch Betrachtung des Integrals der Gleichung $\frac{dz}{dx} = a$, welches nach Art. 464:

$$z = ax + \varphi y \;\ldots\ldots\; (200);$$

denn für alle Punkte der Fläche, welche in der Ebene CD liegen, ist die Ordinate gleich einer Const. c, welche in der Figur 87, durch AB dargestellt ist. Schreibt man daher φc für φy, und macht $\varphi c = C$, so wird die Gleichung (200) in folgende umgeformt:

$$z = ax + C \;\ldots\; (201);$$

diese Gleichung, welche die einer Geraden ist, entspricht dem Schnitte EF, der also eine gerade Linie ist.

497) Da das Nämliche von den schneidenden Ebenen gälte, welche der Ebene der (x, y) parallel gezogen wären, so machen wir den Schluss, dass alle diese Ebenen die Fläche nach geraden Linien schneiden, die parallel sein werden, weil jede mit einer der Axe der x Parallelen einen Winkel einschliesst, dessen trigonometrische Tangente a ist.

498) Macht man nun $x = o$, so wird die Gleichung (200) auf $z = \varphi y$ reducirt, und diese ist zugleich die Gleichung der Curve GHK, die auf der Ebene der (x, y) gezogen ist. Diese Curve, welche alle Punkte der Fläche, die $x = o$ zu Coordinaten haben, in sich begreift, wird der Ebene CD in einem Punkte m, Fig. 87,

begegnen, dessen eine Coordinate $x = o$ ist. Weil nun auch $y = AB = c$; so wird die dritte Coordinate vermöge der Gleichung (201) $z = C$ sein, welcher Werth in der Figur durch Bm bezeichnet ist. Da alles dieses, was bisher von der Ebene CD gesagt wurde, sich auch auf alle übrigen, ihr parallelen ausdehnen lässt; so folgt, dass durch alle Punkte der Curve, derer Gleichung $z = \varphi y$, und die in der Ebene der x, y liegt, grade Linien gehen werden, welche zur Axe der x parallel sind. Alles dieses lehren uns die Gleichungen (199) und (200); und da diese Bedingung immer erfüllt ist, welche Gestalt auch die Curve der Gleichung $z = \varphi y$ haben mag, so ist die Curve offenbar willkührlich.

499) Aus dem Vorhergehenden geht hervor, dass die Curve GHK der Gleichung $z = \varphi y$ aus Bogen verschiedener Curven zusammen gesetzt sein kann, welche mit einander zusammenhängen *), wie in der Figur 88, oder die zwischen sich Zwischenräume lassen, wie aus der Figur 89 ersichtlich ist. Im ersten Falle ist die Curve *discontinuirlich*, im zweiten *discontiguirlich*. Man kann im ersten Falle bemerken, dass zwei verschiedene Ordinaten PM und PN, Fig. 89, der nämlichen Abscisse AP entsprachen. Es ist auch möglich, dass die Curve ohne discontiguirlich zu sein, aus einer unendlichen Reihe unendlich kleiner Bogen zusammengesetzt ist, wovon jeder verschiedenen Curven angehört; in diesem Falle ist die Curve *irregulär*, wie z. B. zufällig gezogene Federstriche. Auf welche Art nun auch die Curve, derer Gleichung $z = \varphi y$, gebildet sein mag, so ist zur Bildung der Fläche hinreichend, eine gerade Linie sich selbst parallel unter der Bedingung bewegen zu lassen, dass ihr Punkt m die zufällig auf der Ebene der (y, z)

*) In diesem Falle wird die Curve mit Hilfe mehrerer Gleichungen sich bestimmen lassen, wovon die erste den Werth der Veränderlichen x, z. B. von $x = a$ bis $x = b$; die zweitere von $x = b$ bis $x = c$, u. s. w. giebt.
(Anmerk. des Verf.)

gezogenen Curve GHK, derer Gleichung $z = \varphi y$, durchlaufe.

500) Wenn statt der Gleichung $\frac{dz}{dx} = a$ man $\frac{dz}{dx} = X$ hätte, worin X eine Funktion von x wäre, und man liesse eine Ebene CD, Fig. 87, parallel zur Ebene von (x, z) gehen, so wäre der Schnitt der Fläche nicht mehr wie im vorhergehenden Falle eine gerade Linie. Denn für jeden Punkt m' auf diesem Schnitte ist die trigonometrische Tangente des Winkels $n'm'm''$, der durch die Verlängerung des Elements $m'm''$ des Schnittes mit einer der Axe der x Parallelen gebildet wird, gleich der Funktion X, von der Abscisse x dieses Punktes; und da diese Abscisse x für jeden Punkt verschieden ist, folgt, dass der Winkel $n'm'm''$ verschieden sein wird bei jedem Punkte dieses Schnittes; woraus erhellet, dass EF keine gerade Linie sein kann, wie vorhin. Die Oberfläche lässt sich wie in der vorigen Aufgabe construiren, wenn man den Schnitt EF sich selbst parallel bewegen lässt, so dass der Punkt m die Curve GHK, derer Gleichung $z = \varphi y$, immerwährend berühre.

501) Man nehme nun an, es sei in der vorigen Gleichung, statt $X = o$, eine Funktion P von x und von y. Obgleich nun die Gleichung $\frac{dz}{dx} = P$ drei Veränderlichen enthält, so gehört sie dennoch einer krummen Fläche an. Schneidet man nun diese Fläche durch eine Ebene, welche jener der x, z parallel ist; so erhält man einen Schnitt, worin y constant sein wird; und da in allen seinen Punkten, $\frac{dz}{dx}$ einer Funktion der Veränderlichen x gleicht, so muss auch, wie in dem vorangehenden Falle dieser Schnitt eine Curve sein. Wird die Gleichung $\frac{dz}{dx} = P$ integrirt, so hat man für die Gleichung der Fläche:

$$z = \int P dx + \varphi y.$$

Giebt man dem y nach und nach die wachsenden Werthe y', y'', y''', ... und benennt durch P', P'', P''', ... dasjenige, was die Funktion P wird; so ergeben sich die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} z = \int P'dx + \varphi y'; \; z = \int P''dx + \varphi y'' \\ z = \int P'''dx + \varphi y'''; \; z = \int P^{IV}dx + \varphi y^{IV} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (202).$$

Man sieht hieraus, dass diese Gleichungen Curven von derselben Natur aber von verschiedener Form angehören, indem die Werthe der Constante y darin nicht die nämlichen sind. Diese Curven sind nichts anders, als die Schnitte der Fläche, welche durch der Axe der (x, z) parallelen Ebenen erzeugt werden; sobald sie der Ebene der (y, z) begegnen, bilden sie eine Curve, derer Gleichung man erhält, wenn der Werth von x in der Gleichung der Fläche gleich Null gesetzt wird. Bezeichnet $\int Pdx$ dasjenige, was die Funktion Y wird; so hat man für diesen Fall:

$$z = Y + \varphi y \ldots . (203).$$

Hieraue folgt, dass wegen φy die Curve, welche durch diese Gleichung bestimmt wird, willkührlich sei. Hat man daher nach Wohlgefallen auf der Ebene der y, z die Curve QRS, Fig. 90, gezogen, und bezeichnet durch RL den Schnitt, dessen Gleichung $z = \int P'dx + \varphi y'$, und lässt diesen Schnitt sich bewegen, indem sein Ende R immer auf der Curve QRS fortgeht; aber so, dass während dieser Bewegung der Schnitt RL nach und nach die Formen bekomme, welche durch die Gleichung (202) bestimmt sind; so erhält man alsdann die Fläche, welcher die Gleichung $\frac{dz}{dx} = P$ angehört.

502) Betrachten wir letztlich die allgemeine Gleichung:

$$\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} + N = o,$$

derer Integral $U = \varphi V$, Art. 482. Sobald $U = a$, $V = b$, so können diese Gleichungen, welche zwischen

drei Coordinaten Statt finden, als die Gleichungen zweier Flächen angesehen werden. Sind nun a und b beliebige Constanten, und giebt man in $U = a$ dem x und y die Werthe x', y', so erhält man für z eine Funktion von x', y' und a, welche einen Punkt der Fläche, derer Gleichung $U = a$, bestimmt. Dieser Punkt ändert nun seine Lage, wenn man der willkührlichen Constante nach und nach verschiedene Werthe giebt, oder mit andern Worten, wenn man a variiren lässt, wird die Fläche, derer Gleichung $U = a$, durch eine neue Reihe Punkte gehen. Da nun alles, was von $U = a$ gesagt wurde, auch auf $V = b$ anwendbar ist, so kann man daraus den Schluss ziehen, dass die Durchschnittscurve der beiden Flächen ihre Lage constinuirlich ändern, mithin eine krumme Fläche beschreiben werde, wovon a und b sich als Coordinaten betrachten lassen; wegen der Beziehung $a = \varphi b$, wodurch die beiden Coordinaten in unzertrennliche Verbindung gebracht sind, willkührlich ist, so ersieht man wohl, dass die Bestimmung der Funktion φ mit jener Aufgabe einerlei ist, vermöge welcher man eine Fläche durch eine willkührlich gezogene Curve legt.

503) Um nun zu zeigen, auf welche Art dergleichen Probleme auf analytische Bedingungen führen können, so erforsche man, welches die Fläche sei, derer Gleichung:

$$y \frac{dz}{dx} = x \frac{dz}{dy} \quad \ldots\ldots (204).$$

Nach Art. 473 ist das Integral dieser Gleichung:

$$z = \varphi (x^2 + y^2) \quad \ldots\ldots (205);$$

also umgekehrt:

$$x^2 + y^2 = \Phi z;$$

wird die Fläche durch eine Ebene geschnitten, welche zur Axe der (x, y) parallel ist, so wird die Gleichung des Schnittes sein:

$$x^2 + y^2 = \Phi c;$$

wird die Constante Φc durch a^2 dargestellt, so ist

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

welches die Gleichung für den Kreis ist. Hieraus erhellet die Eigenschaft dieser Fläche, dass jeder Schnitt, welcher durch eine der Axe der (x, y) paralellen Ebene erzeugt wird, ein Kreis ist.

504) Diese Eigenschaft wird auch noch aus der Gleichung (204) erkannt; denn vermöge des Art. 24 zieht man daraus:

$$x = y \frac{dy}{dx},$$

aus welcher Gleichung man lernt, dass die Subnormale immer der Abscisse gleich ist, welche Eigenschaft dem Kreise zukömmt.

505) Da die Gleichung (205) nicht ausdrückt, ob nur allein die Schnitte, welche der Axe der (x, y) parallel angebracht sind, Kreise seien, so folgt, dass das Gesetz, wornach die Strahlen der Schnitte wachsen müssen, nicht in der Gleichung (205) begriffen sei, und daher jede Fläche durch Umdrehung der Aufgabe Genüge leisten werde; denn es ist bekannt, dass bei dieser Art Flächen die Schnitte, welche zur Axe der (x, y) parallel angebracht werden, immer Kreise sind, und es ist unnöthig zu bemerken, dass die Erzeugende, welche bei einer Umdrehung die Fläche beschreibt, eine discontinuirliche, discontiguirliche, regelmässige oder unregelmässige Curve sein kann.

506) Man suche nun die Fläche, derer Erzeugende eine Parabel AN, Fig. 91, und nehme an, dass bei dieser Voraussetzung die Fläche durch eine Ebene AB geschritten sei, welche durch die Axe der z gehe; der Schnitt dieser Ebene mit jener der (x, y) wird eine gerade Linie AL sein, welche durch den Anfangspunkt geht, und $y = ax$ zur Gleichung hat. Wird durch t die Hypothenuse AQ des auf der Ebene der (x, y) construirten rechtwinklichten Dreiecks APQ, bezeichnet; so hat man:

$$t^2 = x^2 + y^2;$$

da aber AQ die Abscisse der Parabel AN, derer Ordinate QM $= z$ ist, so hat man nach der Natur dieser Curve

$$t^2 = bz;$$

schreibt man für t^2 seinen Werth $x^2 + y^2$, so ergiebt sich:

$$z = \frac{1}{b}(y^2 + x^2) \text{ oder } z = \frac{1}{b}(a^2x^2 + x^2)$$

$$= \frac{1}{b}(a^2 + 1)\, x^2;$$

setzt man $\frac{1}{b}(a^2 + 1) = m$; so ist $z = mx^2$;

die in der Annahme vorgeschriebene Bedingung, wonach die Erzeugende eine Parabel ist, wird also erfüllt durch

$$z = mx^2, \text{ wenn } y = ax.$$

507) Man suche nun mit Hilfe dieser Bedingungen die willkührliche Funktion, welche in die Gleichung (205) eingeführt wird. Zu diesem Ende sei U die Grösse $x^2 + y^2$, welche in derselben Gleichung mit dem Zeichen φ behaftet ist; alsdann wird die Gleichung (205)

$$z = \varphi U \;.\;.\;.\;.\;. \;(206),$$

womit man nun die drei Gleichungen hat:

$$x^2 + z^2 = U;\; y = ax;\; z = mx^2.$$

Vermittelst der beiden ersten lässt sich y eliminiren, und man erhält den Werth von x^2, der in die dritte gesetzt folgende giebt:

$$z = m\,\frac{U}{a^2 + 1},$$

die auf

$$z = \frac{1}{b}\, U$$

reducirt wird, da man $\frac{1}{b}(a^2 + 1) = m$ setzte. Wird dieser Werth von z in die Gleichung (206) substituirt, so wird sie in folgende verwandelt:

$$\varphi U = \frac{1}{b}\, U;$$

setzt man den Werth von U in diese Gleichung, so findet man:

$$\varphi(x^2 + y^2) = \frac{1}{b}(x^2 + y^2),$$

woraus die Bestimmung der Funktion sichtbar ist. Substituirt man diesen Werth von $\varphi(x^2 + y^2)$ in die Gleichung (205), so ist das gesuchte Integral

$$z = \frac{1}{b}(x^2 + y^2),$$

welche Gleichung der verlangten Eigenschaft geniesst, weil die Annahme von $y = ax$ liefert

$$z = mx^2.$$

508) Dieses Verfahren ist allgemein, denn nehmen wir an, dass nach den Bedingungen, wovon die Bestimmung der willkührlichen Constante abhängt, das Integral $F(x, y, z) = o$ gebe, wenn $f(x, y, z) = o$; so bietet sich uns eine neue Gleichung dar, wenn man die Grösse, welcher das Zeichen φ vorgesetzt ist, gleich U macht, und dann nach und nach zwei von den Veränderlichen x, y, z eliminirt, wodurch jede dieser Veränderlichen als Funktion von U erscheint. Werden diese Werthe in das Integral gesetzt, so gelangt man zu einer Gleichung, derer erster Theil φU, und der zweite ein Ausdruck aus U zusammengesetzt sein wird; nimmt man wieder den Werth von U als Funktion der Veränderlichen hervor, so ergiebt sich die Bestimmung der willkührlichen Funktion.

Von den willkührlichen Funktionen, welche in den Integralen der Differenzialgleichungen mit partiellen Differenzialen des zweiten Grades sich vorfinden.

509) Die Differenzialgleichungen mit partiellen Differenzialen der zweiten Ordnung führen zu Integralen, welche zwei beliebige Funktionen enthalten. Die Bestimmung dieser Funktionen bezieht sich darauf, eine Fläche durch zwei Curven zu legen, welche discontinuirlich und discontiguirlich sein können. Um hievon

ein Beispiel zu geben, sei die Gleichung $\frac{d^2z}{dx^2} = o$, derer Integral, nach Art. 487,

$$z = x\varphi y + \psi y \dots\dots\dots (207).$$

Es seien Ax, Ay und Az, Fig. 92, die coordinaten Axen. Legt man eine Ebene KL parellel zur Axe der (x, z); so ist der Schnitt der Fläche durch diese Ebene eine gerade Linie; denn für alle Punkte dieses Schnittes ist $y = Ap$, und wenn man Ap durch eine Constante c bezeichnet, verwandeln sich die Grössen φy und ψy in φc und ψc, welche sich also durch zwei Constante a und b ersetzen lassen, so dass die Gleichung (207) in folgende übergeht:

$$z = ax + b \dots\dots (208),$$

welche die Gleichung des Schnittes ist, der durch die Ebene KL erzeugt wird.

510) Um den Punkt zu erforschen, wo der Schnitt der Ebene der (x, z) begegnet, setze man $x = o$, unter welcher Voraussetzung die Gleichung (207) $z = \psi y$ giebt, woraus ersichtlich ist, dass dieCurve amb auf der Ebene der (y, z) beschrieben ist. Es wäre nicht schwer, wie Art. 498, zu beweisen, dassder Schnitt der Curve amb in einem Punkte m begegne; da dieser Schnitt eine gerade Linie ist, so braucht man nur, um seine Lage zu bestimmen, einen zweiten Punkt zu suchen, durch welchen diese Gerade geht. Man bemerke daher, dass die Gleichung (207) für $x = o$ auf folgende reducirt wird:

$$z = \psi y,$$

während für $x = 1$ dieselbe Gleichung sich in

$$z = \varphi y + \psi y$$

verwandelt; macht man, wie vorhin, $y = Ap = c$, so erhält man diese beiden Werthe:

$$z = b; \text{ und } z = a + b,$$

wodurch zwei Punkte m und r auf demselben Schnitte mr, welcher, wie wir gesehen haben, eine gerade Linie ist, bestimmt werden. Um diese Punkte zu construiren,

verfahre man auf folgende Art. Man ziehe willkührlich auf die Ebene der (y, z) die Curve amb, aus dem Punkte p, wo die schneidende Ebene KL der Axe der y begegnet, errichte die Senkrechte pm = b, welche eine Ordinate zur Curve sein wird; man nehme ferner auf der Durchschnittslinie HL der schneidenden Ebene, und jener der (x, y) den Theil pp′ = 1, lege durch den Punkt p′ eine Ebene Parallel zur Ebene der (y, z), und beschreibe in dieser Ebene die Curve a′m′b′ nach der Form der Curve amb, so dass sie eine ähnliche Lage haben; alsdann ist die Ordinate m′p′ = mp, verlängert man m′p′ um die willkührliche Grösse m′r, welche durch a bezeichnet werde, so bestimmt man den Punkt r des Schnittes.

Verlängert man nach demselben Verfahren alle Ordinaten der Curve a′m′b′, so wird eine neue von der Art construirt, dass wenn man durch diese Curve und durch amb eine Ebene der Axe der (x, z) parallel legt, zwei Punkte, wo die Curven sich begegnen, zu demselben Schnitte der Fläche gehören.

511) Aus diesem Verfahren folgt, dass die Fläche sich auch construiren lasse, indem die Gerade mr sich so bewege, dass sie continuirlich die beiden Curven amb und a′rb′ berühre.

512) Dieses Beispiel mag hinreichen, um kürzlich das Verfahren anzudeuten, nach welchem willkührliche Funktionen, wodurch Differenzialgleichungen mit partiellen Differenzialen der zweiten Ordnung ergänzt werden, sich bestimmen lassen; es ist nämlich einerlei mit jenem, vermittelst dessen man die Fläche durch zwei Curven gehen lässt, welche zugleich mit den willkührlichen Funktionen, die zu ihrer Construction dienen, discontiruirlich, discontiguirlich, regelmässig oder unregelmässig sein können.

Ende.

Noten des Verfassers.

Erste Note.

Ueber die Art, die Entwicklung des Logarithmen von $x + h$ zu finden.

Man suche erst den Log. $(1 + x)$ auf folgende Art zu entwickeln. Man setze Log. $(1 + h)$ einer Reihe gleich, derer Glieder nach den Potenzen von x fortschreiten, und bemerke, dass diese Reihe kein Glied enthalten könne, welches nicht mit x behaftet wäre; denn hätte man:

$$\text{Log.}\,(1 + x) = A + Bx + Cx^2 + \ldots$$

so müsste diese Gleichung für jeden Werth von x Statt finden, und mithin, wenn $x = o$, auch $A = \text{Log.}\,1 = o$. Man schreibe daher:

$$\text{Log.}\,(1 + x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots \quad (1);$$

durch Verwandlung des x in z hat man auch:

$$\text{Log.}\,(1 + z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots$$

Da z eine willkührliche Grösse ist, kann man annehmen, dass zwischen x und z eine gewisse Beziehung Statt finde, nämlich:

$$(1 + x)^2 \text{ oder } 1 + 2x + x^2 = 1 + z.$$

Wird der Werth von z aus dieser Gleichung in die Gleichung (1) eingeführt, so findet man:

$$\text{Log.}\,(1 + x)^2 = A\,(2x + x^2) + B\,(2x + x^2)^2 + C\,(2x + x^2)^3 + \ldots;$$

wird entwickelt und nach x geordnet,

$$\left.\text{Log.}\,(1 + x)^2 = 2Ax + \left.\begin{matrix} A \\ +4B \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 4B \\ +8C \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} B \\ +12C \\ +16D \end{matrix}\right\} x^4 + \ldots \right\} (2).$$

Ferner hat man vermöge der Eigenschaft der Logarithmen $\text{Log.}\,a^n = n\,\text{Log.}\,a$,

$$\text{Log.}\,(1 + x)^2 = 2\,\text{Log.}\,(1 + x),$$

oder wenn man für $1 + x$ seine Entwicklung aus (1) setzt,

$$\text{Log.}\,(1 + x)^2 = 2\,(Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots);$$

substituirt man diesen Werth von Log. $(1 + x^2)$ in den ersten Theil der Gleichung (2), so erhält man eine Gleichung, welche für jedes x Statt findet; folglich, wenn man die Coëfficienten mit denselben Potenzen von x behaftet unter sich gleich setzt,

$$2A = 2A;\ A + 4B = 2B;\ 4B + 8C = 2C; \ldots$$

und hieraus

$$B = -\frac{A}{2};\ C = -\frac{2B}{3} = \frac{A}{3}; \ldots$$

werden diese Werthe substituirt, so erhält man:

$$\text{Log.}\,(1 + x) = A\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right) + C.$$

Wenn $x = o$, so ist Log. $1 = o = C$; woraus ersichtlich ist, dass man keine Constante zuzuzählen braucht; setzt man $x = \frac{h}{x}$, so ist:

$$\text{Log.}\left(1 + \frac{h}{x}\right) \text{ oder Log.}\left(\frac{x + h}{x}\right),$$

oder

$$\text{Log.}\,(x + h) - \text{Log.}\,x = A\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \ldots\right);$$

wird durch h dividirt:

$$\frac{\text{Log.}\,(x + h) - \text{Log.}\,x}{h} = A\left(\frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} - \ldots\right).$$

Für das Gränzverhältniss hat man $\frac{d\,\text{Log.}\,x}{dx} = \frac{A}{x}$, folglich das Differenzial des Log. x gleich $A\,\frac{dx}{x}$; es ist klar, dass die Constante A nichts anders als der Modul ist.

Zweite Note.

Ueber das Fundamental-Princip der Lehre der unbestimmten Coëfficienten.

Man kann beweisen, dass wenn eine Gleichung wie

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = o \ldots (3)$$

für jedes x Statt findet, nothwendig auch die Coëfficienten A, B, C, D, E Null seien; da nun x irgend einen Werth haben kann, mache man $x = o$, und die Gleichung (3) wird $E = o$, und da E von x unabhängig ist, bleibt es auch Null, wenn x einen andern Werth hat. Hieraus folgt, dass die Gleichung (3) auf

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx = o$$

sich bringen lässt; unterdrückt man den gemeinschaftlichen Faktor x, so ist

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = o.$$

Werden auf diese Gleichung die nämlichen Schlüsse angewandt wie auf (3), so ergiebt sich, dass D Null ist; fährt man so fort, so folgt, dass es die andern Coëfficienten auch sind.

Dritte Note.

Ueber die Entwicklung der Potenzen von Cosinus und Sinus als Funktion der vielfachen Bogen.

Es giebt eine sehr schöne Formel für den Werth einer Potenz eines Cosinus als Funktion der Grössen Cos. x, Cos. 2x, Cos. 3x, ... wie auch für die Sinusse; es lohnt der Mühe, sie kennen zu lernen. Bevor wir uns aber mit diesem Gegenstande beschäftigen, müssen wir zuerst mit einer merkwürdigen imaginären Formel bekannt machen, die in der Folge sehr nützlich sein wird.

Es sei daher der Ausdruck $\text{Cos.}^2\varphi + \text{Sin.}^2\varphi$, der ein Produkt der Faktoren $\text{Cos.}\,\varphi + \text{Sin.}\,\varphi\sqrt{-1}$ und $\text{Cos.}\,\phi - \text{Sin.}\,\phi\sqrt{-1}$ ist; macht man $\text{Cos.}\,\phi + \text{Sin.}\,\phi\sqrt{-1} = F\phi$, so hat man durch Differenziation:

$$\frac{dF\phi}{d\phi} = -\,\text{Sin.}\,\phi + \text{Cos.}\,\phi\sqrt{-1};$$

wird diese Gleichung durch $-\sqrt{-1}$ vervielfacht; so geht sie über in:

$$-\frac{dF\varphi}{d\varphi}\sqrt{-1}=F\varphi,$$

hieraus geht hervor:

$$\frac{dF\varphi}{F\varphi}=-\frac{d\varphi}{\sqrt{-1}}=-\frac{d\varphi}{\sqrt{-1}}\times\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=d\varphi\sqrt{-1};$$

und durch Integration:

$$\text{Log.}\,F\varphi=\varphi\sqrt{-1}=(\varphi\sqrt{-1})\,\text{Log.}\,e=\text{Log.}\,e^{\varphi\sqrt{-1}};$$

nimmt man die entsprechenden Zahlen, so ist:

$$F\varphi=e^{\varphi\sqrt{-1}};$$

wird für $F\varphi$ sein Werth gesetzt, so hat man:

$$\text{Cos.}\,\varphi+\text{Sin.}\,\varphi\sqrt{-1}=e^{\varphi\sqrt{-1}}\;\ldots\ldots\;(4).$$

Diese Gleichung findet Statt, was auch immer φ bedeuten mag; verwandelt man daher φ in $m\varphi$, so ist ebenfalls:

$$\text{Cos.}\,m\varphi+\text{Sin.}\,m\varphi\sqrt{-1}=e^{m\varphi\sqrt{-1}}.$$

Es giebt noch einen andern Ausdruck für diese imaginäre Potenz von e; denn erhebt man diese Gleichung zur Potenz m, so giebt sie:

$$(\text{Cos.}\,\varphi+\text{Sin.}\,\varphi\sqrt{-1})^m=e^{(\varphi\sqrt{-1})m}=e^{m\varphi\sqrt{-1}}.$$

Setzt man die ersten Theile dieser beiden Gleichungen unter sich gleich, so hat man:

$$(\text{Cos.}\,\varphi+\text{Sin.}\,\varphi\sqrt{-1})^m=\text{Cos.}\,m\varphi+\text{Sin.}\,m\varphi\sqrt{-1}.\;(5).$$

Macht man $\varphi=-\varphi$ in den Gleichungen (4) und (5), so gehen sie in folgende über:

$$\text{Cos.}-\varphi+\text{Sin.}-\varphi\sqrt{-1}=e^{-\varphi\sqrt{-1}}\ldots\;(6),$$

$$(\text{Cos.}-\varphi+\text{Sin.}-\varphi\sqrt{-1})^m=\text{Cos.}-m\varphi+\text{Sin.}-m\varphi\sqrt{-1}\,(7).$$

Wird nun φ durch den Bogen AD, Fig. 61, bezeichnet, so ist es $-\varphi$ durch den Bogen AD′; und da diese Bo-

gen dieselben Cosinusse, die Sinusse aber mit entgegengesetzten Zeichen haben, so hat man:

$$\text{Cos.} - \phi = \text{Cos.}\ \phi;\ \text{Sin.} - \phi = - \text{Sin.}\ \phi;$$

auf die nämliche Art liesse sich beweisen, dass

$$\text{Cos.} - m\phi = \text{Cos.}m\phi;\ \text{und Sin.} - m\phi = - \text{Sin.}m\phi.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (6) und (7), so erhält man:

$$\text{Cos.}\,\varphi - \text{Sin.}\,\varphi\sqrt{-1} = e^{-\phi\sqrt{-1}} \ldots\ldots (8),$$

$$(\text{Cos.}\,\phi - \text{Sin.}\,\phi\sqrt{-1})^m = \text{Cos.}\,m\varphi - \text{Sin.}\,m\varphi\sqrt{-1} \ldots (9).$$

Wir wollen nun die Reihe von $\text{Cos.}^m x$ als Funktion der vielfachen Bogen von x aufsuchen, ohne aber von den Potenzen der Sinusse und Cosinusse Gebrauch zu machen. Es sei daher:

$$\text{Cos.}\,x + \text{Sin.}\,x\sqrt{-1} = u \ldots\ldots (10),$$

$$\text{Cos.}\,x - \text{Sin.}\,x\sqrt{-1} = v \ldots\ldots (11);$$

addirt man diese Gleichungen, so entsteht:

$$\text{Cos.}\ x = \tfrac{1}{2}\ (u + v),$$

folglich:

$$\text{Cos.}^m x = \frac{1}{2^m}(u+v)^m;\ \text{Cos.}^m x = \frac{1}{2^m}(v+u)^m;$$

entwickelt man diese Binomien nach der gewöhnlichen Weise, so erhält man:

$$\text{Cos.}^m x = \frac{1}{2^m}\left[u^m + mu^{m-1}v + m.\frac{m-1}{2}u^{m-2}v^2 + \ldots\right],$$

$$\text{Cos.}^m x = \frac{1}{2^m}\left[v^m + mv^{m-1}u + m.\frac{m-1}{2}v^{m-2}u^2 + \ldots\right];$$

addirt man diese beiden Gleichungen, so ergiebt sich:

$$2^{m+1}\text{Cos.}^m x = u^m + v^m + muv\left(u^{m-2} + v^{m-2}\right)$$

$$+ m\frac{m-1}{2}u^2v^2\left(u^{m-4} + v^{m-4}\right) + \ldots (12).$$

Man hat aus den Formeln (10) und (11):

$$u^m = (\text{Cos.}x + \text{Sin.}x\sqrt{-1})^m;\ v^m = (\text{Cos.}x - \text{Sin.}x\sqrt{-1})^m;$$

setzt man in die Theile auf der Rechten des Gleich-

heitszeichens dieser Gleichung ihre Werthe aus (5) und (9), so hat man:

$$u^m = \text{Cos. } mx + \text{Sin. } mx \sqrt{-1}$$
$$v^m = \text{Cos. } mx - \text{Sin. } mx \sqrt{-1} \ldots (13);$$

mithin:

$$u^m + v^m = 2 \text{ Cos. } mx, \text{ und } u^m v^m = 1,$$

folglich:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad uv = 1,$$
$$u^{m-2} + v^{m-2} = 2 \text{ Cos. } (m-2) x; \; u^{m-2} v^{m-2} = 1,$$
$$u^{m-4} + v^{m-4} = 2 \text{ Cos. } (m-4) x; \; u^{m-4} v^{m-4} = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (12), so findet man:

$$\text{Cos.}^m x = \frac{1}{2^{m+1}} [2 \text{ Cos. } mx + 2m \text{ Cos. } (m-2) x$$
$$+ 2m \frac{(m-1)}{2} \text{ Cos. } (m-4) + \ldots] \ldots\ldots (14).$$

Diese Reihe, welche von $(u + v)^m$ herkömmt, enthält $m + 1$ Glieder; macht man nach und $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$, . . . und verwandelt die Cosinusse negativer Bogen in positive vermöge der Gleichung Cos. $-\phi$ $=$ Cos. ϕ, so kann man folgende Tabelle bilden:

$$\text{Cos.}^2 x = \tfrac{1}{2} \text{ Cos. } 2x + \tfrac{1}{2},$$
$$\text{Cos.}^3 x = \frac{\text{Cos. } 3x}{4} + \frac{3 \text{ Cos. } 3x}{4},$$
$$\text{Cos.}^4 x = \frac{\text{Cos. } 4x}{8} + \tfrac{1}{2} \text{ Cos. } 2x + \tfrac{3}{8}.$$

Man kann diese Rechnungen abkürzen, weil die Glieder, welche von den Enden der Reihe gleichweit abstehen, gleich sind. Um dieses zu beweisen, bemerken wir, dass die Cosinusse, welche in der Gleichung (14) sich vorfinden sind:

Cos. mx; Cos. $(m-2)x$; Cos. $(m-4)x$; Cos. $(m-2\times3)x$, . . .
oder vielmehr:

Cos. mx; Cos. $(m-2\times1)x$; Cos. $(m-2\times2)x$; Cos. $(m-2\times3)x$; . . .

betrachtet man die Zahlen, welche auf das Zeichen $\times$ in jedem Gliede der Reihe folgen, so erkennt man, dass die eine von diesen Zahlen die Anzahl der vorhergehenden Glieder anzeigt. Das Glied also, dem n andere vorangehen, wird mit Cos. $(m - 2n)\,x$ behaftet sein; und da die ganze Anzahl der Glieder der Reihe $m + 1$ ist, so wird jenes, welches auf das n^{te} Glied folgt, die Stelle $m + 1 - n$ einnehmen, und folglich $m - n$ Glieder vor sich haben, und mithin folgenden Ausdruck enthalten:

$$\text{Cos.}\,[m - 2\,(m - n)]\,x = \text{Cos.}\,(-m + 2n)\,x;$$

und da man mit Recht das Zeichen des Bogens, dessen Cosinus man kennt, verändern kann, so ist:

$$\text{Cos.}\,(-m + 2n)\,x = \text{Cos.}\,(m - 2n)\,x;$$

hieraus folgt, dass die Glieder, welche von den Enden gleichweit entfernt sind, dieselben Cosinusse haben, und da sie auch mit den nämlichen Coëfficienten behaftet erscheinen (man kann dies erkennen, wenn man die Entwicklungen, von $(a + b)^m$ und $(b + a)^m$ miteinander vergleicht), welche zugleich die Coëfficienten der binomischen Formel sind; so geht daraus hervor, dass diese Glieder unter sich gleich seien. Ist also m ungrade, so ist $m + 1$ die Anzahl der Glieder der Reihe grad, und man braucht nur die $\frac{m+1}{2}$ ersten Glieder verdoppeln, um die Gesammtheit der Glieder der Reihe zu bekommen; ist aber m grad, so ist $m + 1$ ungrad, in welchem Falle man dem Mittelgliede das doppelte der vorhergehenden zuzuzählen hat; dieses Glied wird die $\frac{m}{2} + 1$ Stelle in der Reihe einnehmen, und mithin Cos. $(m - m) =$ Cos. $o = 1$ sein, d. i. es wird keine Cossinusse enthalten.

Durch ein ähnliches Verfahren kann man zur Entwicklung von $\text{Sin.}^m x$ gelangen. Man subtrahire desshalb die Gleichung (11) von der Gleichung (10), und man erhält:

$$2\,\mathrm{Sin.}\,x\sqrt{-1} = u - v;\ \text{also}\ \mathrm{Sin.}\,x = \frac{u-v}{2\sqrt{-1}};$$

wird auf beiden Seiten dieser Gleichung zur Potenz m erhoben, so ist:

$$\mathrm{Sin.}^m x = \frac{1}{(2-1)^m}(u-v)^m;$$

ist m gleich einer graden Zahl 2p, so hat man:

$$(u-v)^{2p} = [(u-v)^2]^p = [(v-u)^2]^p = (v-u)^{2p};$$

mithin

$$(u-v)^m = (v-m)^m.$$

Man muss die Gleichungen

$$\mathrm{Sin.}^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}(u-v)^m \text{ und } \mathrm{Sin.}^m x\ \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}(v-u)^m,$$

entwickeln, und nach der vorhin angezeigten Art verfahren; dadurch gelangt man zu

$$\mathrm{Sin.}^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\left[\mathrm{Cos.}\,mx - m\,\mathrm{Cos.}\,(m-2)\,x + m\frac{m-1}{1.2}\right.$$
$$\left.\mathrm{Cos.}\,(m-4)\,x + \ldots\ldots\right];$$

die imaginäre Grösse $(2\sqrt{-1})^m$ verschwindet aus dem Resultate, weil sie zu einer paaren Potenz erhoben ist.

Wenn m einer ungraden Zahl 2p + 1 gleich ist, so hat man:

$$(u-v)^{2p+1} = (u-v)^{2p}\times(u-v) = (v-u)^{2p}\times-(v-u)$$
$$= -(v-u)^{2p+1},$$

folglich

$$(u-v)^m = -(v-u)^m,$$

und

$$\mathrm{Sin.}^m x = \frac{(u-v)^m}{(2\sqrt{-1})^m};\ \mathrm{Sin.}^m x = -\frac{(v-u)^m}{(2\sqrt{-1})}\ \ldots\ (15);$$

entwickelt man $(u-v)^m$ und $(v-u)^m$ nach der binomischen Formel, und substituirt diese Entwicklungen in die Gleichungen (15), so hat man nach ihrer Addition:

$$2\,\mathrm{Sin.}^m x = \frac{1}{\sqrt{(2-1)^m}}\left[u^m - v^m - \frac{m}{1}uv(u^{m-2} - v^{m-2})\right.$$
$$\left.+ \ldots\right]\ \ldots\ldots\ (16);$$

zieht man die Gleichungen (13) voneinander ab, multiplicirt hierauf die nämlichen Gleichungen durcheinander, und bemerkt, dass diese zweite Operation zur Summe der Quadrate des Sin. mx und Cos. mx führt, die der Einheit gleicht, so ergiebt sich:

$$u^m - v^m = 2 \text{ Sin. } mx \sqrt{-1}; \; u^m v^m = 1.$$

Verfährt man wie oben, so verwandelt sich die Gleichung (16) in folgende:

$$\text{Sin.}^m x = \frac{1}{2(2\sqrt{-1})^{m-1}} [\text{Sin. } mx - \frac{m}{1} \text{ Sin. } (m-2) x + \frac{m(m-1)}{1.2} \text{ Sin. } (m-4) x + \ldots].$$

Da in dieser Voraussetzung m ungrad ist, so ist die Potenz m — 1, zu welcher die Grösse $2\sqrt{-1}$ erhoben vorkömmt, grade, und hiedurch verschwindet die imaginäre Grösse $\sqrt{-1}$.

Vierte Note.

Ueber die Art der Bestimmung des Volumens solcher Körper, derer Oberfläche durch eine Funktion einer Veränderlichen ausgedrückt werden kann.

Sind die Körper nicht durch Umdrehung entstanden, so lässt sich bisweilen ihr Volumen vermittelst einer einfachen Integration bestimmen, ohne von der Formel (84) Gebrauch zu machen, welches wir nun an der Pyramide ABCD, Fig. 66, versuchen wollen. Man denke sich einen zur Grundfläche DBC parallelen Schnitt GFE, lasse von der Spitze A eine Senkrechte AH auf die Grundfläche DCB herab, und es mögen die Theile AJ und JH dieser Senkrechten, welche durch die Ebene GFE erzeugt werden, x und h heissen; es ist offenbar, dass der Flächenraum des Dreiecks GFE kleiner oder grösser wird, je nachdem man dem x einen Werth beilegt, ist mithin eine Funktion von x. Man hat daher

$$GEF = fx; \; DCB = f(x + h).$$

Da das Volumen der Pyramide AGFE ebenfalls eine Funktion von x ist, so lässt sich annehmen, dass

$$\text{Vol. AGEF} = \phi x; \text{ Vol. ADBC} = \varphi (x + h)$$

Die abgestumpfte Pyramide GB, als der Unterschied dieser Volumen, ist bestimmt kleiner, als das Volumen des Prisma, dessen Grundfläche BCD, und dessen Höhe h ist, und grösser als das Volumen des Prisma, dessen Grundfläche EFG und Höhe h, mithin das Verhältniss dieser Prismen

$$\frac{f(x + h)\, h}{fx \,.\, h} = \frac{f(x + h)}{fx};$$

da im Falle des Verhältnisses der Endgränze dieses der Einheit gleich wird, so ist dies um so mehr der Fall bei dem Verhältnisse zwischen der abgestumpften Pyramide GB, und dem einen der Prismen; weil nun das Volumen der abgestumpften Pyramide durch $\phi(x + h) - \phi x$ bezeichnet ist, so wird das Verhältniss dieses Volumens zum Volumen des Prisma, dessen Grundfläche GFE, und dessen Höhe h, ausgedrückt durch

$$\frac{\varphi(x + h) - \phi x}{fx \,.\, h} = \frac{\frac{d\phi x}{dx} + \frac{d^2\phi x h}{d^2 x 2} + \ldots}{fx};$$

für das Gränzverhältniss

$$\frac{d\phi x}{fx dx} = 1; \text{ oder } d\phi x = fx \,.\, dx \;\ldots\ldots\; (17).$$

Mit Hilfe der Lehre vom unendlich Kleinen, wäre man zu demselben Resultate gelangt. Denn denkt man sich die Pyramide aus unendlich kleinen Scheiben zusammengesetzt, die alle zur Grundfläche parallel sind, so könnte man jede Scheibe als ein Prisma mit der Höhe dx und der Grundfläche fx betrachten, mithin fx . dx ein Element der Pyramide.

Um nun das Volumen der Pyramide zu bestimmen, sei B der Inhalt der Grundfläche DBC, und A ihre Höhe; man hat hiernach

$$B : fx = A^2 : x^2,$$

folglich

$$fx = \frac{Bx^2}{A^2};$$

wird dieser Werth in die Gleichung (17) eingeführt, so findet sich:

$$d\varphi x = \frac{Bx^2}{A^2}; \ldots$$

wird integrirt

$$\varphi x = \frac{Bx^3}{3A^2}.$$

Das Volumen AGEF, welches durch φx bezeichnet ist, verschwindet, wenn $x = o$, man braucht also dem Integral keine Constante beizufügen; ist $x = A$, so hat man für das bestimmte Integral den Ausdruck $\frac{BA}{3}$, und dies ist der Ausdruck des Volumens der Pyramide ACBD.

Wäre im Allgemeinen der Schnitt statt eines Dreiecks irgend eine andere Fläche, und diese eine Funktion von x, so lässt sich nach dem, was von der Pyramide gesagt wurde, beweisen, dass das Element des Körpers $fx \, . \, dx$ zum Ausdrucke hat.

Fünfte Note.

Ueber die Projection einer ebenen Fläche.

Um zu beweisen, dass die Projection einer ebenen Fläche auf eine Ebene dem Produkte aus dieser Oberfläche in den Cosinus des Neigungswinkels gleich sei, nenne man γ den Projectionswinkel, welchen eine Fläche A mit einer Fläche B bildet, und die Fläche A sei zur andern geneigt, sich also nothwendigerweise begegnen werden. Ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt sei die Axe der x, und die Ordinaten y der Fläche B zu dieser Axe senkrecht; es ist gewiss, dass jede Ordinate y dieser Fläche y Cos. α zur Projection auf die andere haben werde, folglich, wenn das Element der Fläche A durch

ydx, Art. 348, bezeichnet wird, ist jenes der Fläche B,y Cos. γdx; nimmt man die Integrale, so ergiebt sich

$$A = \int y dx;\ B = \int y\ \mathrm{Cos.}\ \gamma dx = \mathrm{Cos.}\ \gamma \int y dx;$$

eliminirt man $\int y dx$ mit Hilfe dieser Gleichung, so findet man:

$$B = A\ \mathrm{Cos.}\ \gamma.$$

Sechste Note.

Ueber den Ausdruck des Cosinus des Winkels, welchen zwei Ebenen unter sich bilden, der direckt auf eine ganz neue Art bestimmt werden soll.

Um den Neigungswinkel zweier Ebenen zu bestimmen, seien DB, DC, CB, Fig. 93, die Durchschnittslinien einer Ebene DBC mit den Coordinaten Ebenen, derer rechtwinklichte Axen auf den Richtungen der Geraden AB, AC und AD liegen; ferner bezeichne man AB durch a; AC durch b; AD durch c, und die Neigungswinkel der Ebene DBC mit den Ebenen der (z, y), (x, z) und (x, y) durch α, β, γ; da $\frac{bc}{2}$, $\frac{ac}{2}$, $\frac{ab}{2}$ die Projectionen der Fläche BCD auf diese Ebenen sind, hat man nach der vorhergehenden Note

$$DBC\ \mathrm{Cos.}\ \gamma = \frac{ab}{2};\ DBC\ \mathrm{Cos.}\ \alpha = \frac{bc}{2};$$

$$DBC\ \mathrm{Cos.}\ \beta = \frac{ac}{2} \ \ldots\ldots\ (18);$$

wird jede dieser Gleichungen zum Quadrat erhoben, ihre Summe genommen, und die Einheit statt der Summe der Quadrate der Cosinusse geschrieben, und die Quadratwurzel ausgezogen, so ergiebt sich:

$$DBC = \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2};$$

wird dieser Werth in die erste der Gleichungen (18) eingeführt, so geht hervor:

$$\mathrm{Cos.}\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}} \ \ldots\ldots\ (19).$$

Es sei nun $Ax + By + Cz + D = o$ die Gleichung der Ebene DBC; macht man $y = o$, so hat man $Ax + Cz + D = o$, welches die Gleichung der Durchschnittslinie DB ist, hieraus leitet man ab:

$$z = -\frac{Ax}{C} + \frac{D}{C}.$$

Da dies die Form der Gleichung für die grade Linie ist, wird der Coëfficient von x die trigonometrische Tangente des Winkels darstellen, welchen die Gerade mit der Axe der x bildet; so hat man:

$$\text{Tang. DBA} = -\frac{A}{C};$$

aus dem Dreiecke DBA ist auch

$$\text{Tang. DBA} = \frac{c}{a}.$$

folglich durch Vergleichung dieser beiden Werthe

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{A^2}{C^2};$$

macht man in der Gleichung für die Ebene $x = o$, um die Gleichung des Durchschnitts mit der Ebene der (x, y) zu erhalten, so findet man:

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{B^2}{C^2};$$

werden diese Werthe in die Gleichung (19) eingeführt, so ergiebt sich:

$$\text{Cos. } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2}}}.$$

Dividirt man nun die Gleichung der Ebene durch C, und differenziirt hierauf hinsichtlich der Veränderlichen x und y, so findet man:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{A}{C}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{B}{C},$$

werden diese Werthe in jenen für den Cos. γ eingeführt, so ist

$$\text{Cos. } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}.$$

Siebente Note.

Ueber die Curven mit doppelter Krümmung, welche mit Hilfe zweier Gleichungen zwischen drei Veränderlichen construirt werden kann.

Es ist nicht schwer zu beweisen, dass die Gleichungen (122) einer Curve mit doppelter Krümmung angehören. Man vertausche nun die y gegen z, und die z gegen y, um den Coordinaten-Axen eine unserm Beweise angemessene Lage zu geben; man hat alsdann folgende Gleichungen:

$$z^2 + 2xy + y^3 = o \;.\;.\;.\;.\;.\; (20),$$

$$2x + 3y^2 - 2 = o \;.\;.\;.\;.\;.\; (21).$$

Wäre die erste allein vorhanden, so könnte man dadurch eine krumme Fläche construiren. Denn wenn man aus allen Punkten der Ebene der (x, y), die, wie immer, horizontal angenommen wird, Senkrechten errichtet, so lassen sich ihre Werthe mit Hilfe der Gleichung (20) bestimmen, und man erkennt leicht, dass die Endpunkte der Ordinaten z eine krumme Fläche bilden werden. Sind einige dieser Ordinaten imaginär, so ist dies ein Zeichen, dass die Fläche sich nicht ausbreitet, wo diese imaginären Ordinaten Statt finden.

Nehmen wir nun auf die Gleichung (21) Rücksicht, und setzen dadurch zwischen x und y eine gewisse Verbindung fest, vermöge welcher die Fusspunkte der Ordinaten z auf der Curve sein sollen, welche der Gleichung (21) entspricht; so erkennt man, dass in diesem Falle, die Endpunkte der Ordinaten z, keine Fläche mehr bilden, wohl aber eine Curve; das System dieser Ordinaten z bestimmt alsdann eine cylinderförmige Fläche, derer Durchschnittslinie mit der Ebene der (x, y) durch

die Gleichung (21) gegeben ist. Gerade der Durchschnitt der Fläche mit jener der Gleichung (21) ist es, welcher die Curve bildet, von der wir so eben gesprochen haben, und es ist offenbar, dass diese Curve eine doppelte Krümmung habe, weil nämlich der Durchschnitt zweier krummen Oberflächen eine Curve mit doppelter Krümmung bildet.

Achte Note.

Neuer Beweis für die Integration der Gleichungen mit partiellen Integralen.

Man hat, Art. 482, gesehen, dass wenn man die Gleichung:

$$\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} + N = o \; . \; . \; . \; . \; . \; (22),$$

worin M und N Funktionen von x, y und z sind, integrirt, und zwei Integrale $U = a$ und $V = b$ zum Vorschein kommen, man nothwendig $a = \varphi b$ habe.

Da der Beweis dieses Lehrsatzes ausserordentlich wichtig ist, so wollen wir suchen ihn mit genauester Schärfe auf folgende Art zu geben.

Wenn U und V Funktionen von x, y und z sind, so können die Constanten a und b auch als Funktionen der nämlichen Veränderlichen vermöge der Gleichungen $U = a$ und $V = b$ betrachtet werden; differenziirt man daher nach und nach diese Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} da = Xdx + Ydy + Zdz \\ db = X'dx + Y'dy + Z'dz \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (23);$$

diese Differenziale müssen wegen der Constanten a und b Null sein, es machen daher die Gleichungen $da = o$, $db = o$ folgende nothwendig:

$$\left.\begin{array}{l} Xdx + Ydy + Zdz = o \\ X'dx + Y'dy + Z'dz = o \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (24).$$

Werden diese Gleichungen durch dx dividirt, und darin die Werthe von dz und dy aus

$$dz + Ndx = o; \; dy - Mdx = o \; . \; . \; . \; (25),$$

substituirt, so erhält man:

$$X + YM - ZN = o;\ X' + Y'M - Z'N = o;$$

und aus diesen Gleichungen:

$$M = \frac{ZX' - XZ'}{Z'Y - ZY'};\ N = \frac{X'Y - Y'X}{Z'Y - ZY'};$$

substituirt man diese Werthe von M und N in die Gleichungen (22), so ergiebt sich:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{ZX' - XZ'}{Z'Y - ZY'} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{X'Y - Y'X}{Z'Y - ZY'} = o \ldots (26);$$

die Coëfficienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ lassen sich aus den Gleichungen (25) herleiten, nämlich:

$$\frac{dz}{dx} = -N;\ \frac{dy}{dx} = M;\ \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{N}{M} \cdot (27);$$

setzt man diese Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und von $\frac{dz}{dy}$ in die Gleichung (26), und lässt den Nenner verschwinden, so findet man:

$$-(Z'Y - ZY')M - (ZX' - XZ')\frac{N}{M}$$
$$+ X'Y - Y'X = o \ldots (28);$$

die Grössen X, Y, Z, welche sich in dieser Gleichung finden, sind nicht immer bekannt, weil sie nur bei der Differenziation der Gleichungen $U = a$, $V = b$ gegeben sein müssen. Man suche daher X, Y und Z aus diesem Resultate zu eliminiren. Wird desshalb z als eine Funktion von x und y betrachtet, so gehen aus den Gleichungen (23) hervor:

$$\frac{da}{dx} = X + Z\frac{dz}{dx};\ \frac{db}{dx} = X' + Z'\frac{dz}{dx};$$
$$\frac{da}{dy} = Y + Z\frac{dz}{dy};\ \frac{db}{dy} = Y' + Z'\frac{dz}{dy};$$

setzt man in diese Ausdrücke die Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ aus den Gleichungen (27), und nimmt die Werthe von X, Y, X' und Y', so ist:

$$X = \frac{da}{dx} + ZN;\ X' = \frac{db}{dx} + Z'N;$$

$$Y = \frac{da}{dy} + \frac{ZN}{M};\ Y' = \frac{db}{dy} + \frac{Z'N}{M};$$

substituirt man diese Werthe von X, Y, X′ und Y′ in die Gleichung (28) und reducirt, so erhält man:

$$\frac{da}{dx} \cdot \frac{db}{dy} = \frac{da}{dy} \cdot \frac{db}{dx} \ldots \ldots (29).$$

Diese Gleichung lehrt uns, dass a Funktion von b ist; man findet auch wirklich, wenn die Gleichung a = Fb differenziirt wird, da = φbdb, hieraus folgt:

$$\frac{da}{dx} = \varphi b \frac{db}{dx};\ \frac{da}{dy} + \varphi b \frac{db}{dy};$$

eliminirt man φb, so gelangt man zur Gleichung (29).

Neunte Note.

Ueber die Integration rationaler Funktionen, welche in ihren Nennern, die gleich Null gesetzt werden, imaginäre und gleiche Wurzeln enthalten.

Da die Integration rationaler Brüche dieser Form sich auf die Formel $\frac{Mdz}{(\beta^2+z^2)^p}$ reduciren lassen, und die Art, nach welcher wir oben diesen Ausdruck integrirt haben, ein wenig verwickelt ist, so wollen wir ein anderes Verfahren anzeigen, das zwar weniger direct, aber weit schneller zum Ziele führt.

Man nehme an:

$$\int \frac{dz}{(\beta^2 + z^2)^p} = \frac{Hz}{(\beta^2 + z^2)^{p-1}} + K \int \frac{dz}{(\beta^2 + z^2)^{p-1}} \ldots \ldots \ldots (30),$$

oder, was auf das nämliche hinausläuft,

$$\int \frac{dz}{(\beta^2 + z^2)^p} = Hz\,(\beta^2 + z^2)^{1-p} + K \int \frac{dz}{(\beta^2 + z^2)^{p-1}};$$

durch Differenziation hat man:

$$\frac{dz}{(\beta^2+z^2)^p}=Hdz\,(\beta^2+z^2)^{1-p}+H\,(1-p)(\beta^2+z^2)^{-p}\,2z^2dz$$
$$+K\frac{dz}{(\beta^2+z^2)^{p-1}},$$

oder

$$\frac{dz}{(\beta^2+z^2)^p}$$
$$=\frac{Hdz\,(\beta^2+z^2)}{(\beta^2+z^2)^p}+\frac{2H\,(1-p)\,z^2dz}{(\beta^2+z^2)^p}+K\frac{(\beta^2+z^2)\,dz}{(\beta^2+z^2)};$$

vernachlässigt man die gemeinschaftlichen Faktoren,

$$1=H\,(\beta^2+z^2)+2H\,(1-p)\,z^2+K\,(\beta^2+z^2);$$

und setzt die Coëfficienten von z^2 unter sich gleich, wie auch jene, welche davon nicht abhängen, so hat man

$$1=H\beta^2+K\beta^2;\; H+2\,(1-p)\,H+K=o,$$

und hieraus

$$K=\frac{1}{2\,(p-1)\,\beta^2};\; K=\frac{2p-3}{2\,(p-1)\,\beta^2};$$

da H und K bekannt sind, so substituire man ihren Werth in die Gleichung (30), und es ist

$$\int\frac{dz}{(\beta^2+z^2)^p}$$
$$=\frac{1}{2(p-1)\beta^2}\,\frac{z}{(\beta^2+z^2)^{p-1}}+\frac{(2p-3)}{2\,(p-1)\beta^2}\int\frac{dz}{(\beta^2+z^2)^{p-1}}\;(31);$$

das Integral von $\frac{dz}{(\beta^2+z^2)^p}$ hängt also von einem andern ab, in welchem der Exponent der Parenthese um eine Einheit kleiner ist. Nimmt man daher in der Formel (31) p für p — 1, so macht man das Integral von $\frac{dz}{(\beta^2+z^2)^{p-1}}$ abhängig von dem Integral von $\frac{dz}{(\beta^2+z^2)^{p-2}}$; vermindert man so nach und nach den Exponenten der Parenthese um eine Einheit, so geräth man zuletzt auf $\int\frac{dz}{\beta^2+z^2}$, dessen Integral $\frac{1}{\beta}\,\text{Bog.}\left(\text{Tang.}=\frac{z}{\beta}\right)$ ist.

Ende der Noten.

Zusätze des Uebersetzers.

Erster Zusatz.

Zur Zerfällung rationaler Bruchfunktionen in ihre Theilbrüche.

1) Es lassen sich drei Fälle unterscheiden, wenn die Faktoren des Nenners zweitheilig sind, nämlich 1° diese Faktoren sind alle ungleich; 2°, alle sind unter sich gleich; 3° einige sind unter sich gleich, andere ungleich, von letzteren aber heiner dem vorhergehenden gleich.

Wir wollen nun diese drei Fälle unter allgemeine Regeln bringen.

2) Es sei $\frac{\psi x}{\varphi x}$ ein rationaler Bruch von dem wir einstweilen annehmen, dass die höchste Potenz der Veränderlichen des Nenners grösser sei, als die höchste Potenz der Veränderlichen im Zähler. Nimmt man an:

$$\varphi x = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots\ldots$$

und bezeichnet durch A, B, C, ... die Zähler der Theilbrüche, so hat man:

$$\frac{\psi x}{\varphi x} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} + \ldots;$$

wird unter einerlei Benennung gebracht, und alsdann der gemeinschaftliche Nenner weggeworfen, so steht:

$$\begin{aligned}\psi x = {} & A\,(x - b)(x - c)(x - d) \ldots \\ & + B\,(x - a)(x - c)(x - d) \ldots \\ & + C\,(x - a)(x - b)(x - d) \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Was auch x für einen Werth haben mag, so muss diese identische Gleichung immer Statt finden. Schreibt man daher für x nach und nach a, b, c, d, ... so fallen,

wie deutlich erhellet, einmal alle Glieder hinweg, worin a vorkömmt, dann alle worin b vorkömmt; hiedurch gelangt man zu folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \psi a = A\,(a-b)\,(a-c)\,(a-d)\ldots \\ \psi b = B\,(b-a)\,(b-c)\,(b-d)\ldots \\ \psi c = C\,(c-a)\,(c-b)\,(c-d)\ldots \\ \vdots \qquad \vdots \end{array}\right\}\ldots (A).$$

Differenzïrt man auf der andern Seite die identische Gleichung

$$\varphi x = (x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots\ldots$$

und dividirt alsdann durch dx, so erhält man:

$$\begin{array}{l} \dfrac{d\varphi x}{dx} = (x-b)\,(x-c)\,(x-d)\ldots \\ \qquad + (x-a)\,(x-c)\,(x-d)\ldots \\ \qquad + (x-a)\,(x-b)\,(x-d)\ldots \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Werden auch hier nach und nach a, b, c, ... für x geschrieben, so gelangt man zu folgenden Gruppen von Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\varphi a}{da} = (a-b)\,(a-c)\,(a-d)\ldots \\ \dfrac{d\varphi b}{db} = (b-a)\,(b-c)\,(b-d)\ldots \\ \dfrac{d\varphi c}{dc} = (c-a)\,(c-b)\,(c-d)\ldots \\ \vdots \qquad \vdots \end{array}\right\}\ldots (B).$$

Dividirt man nun die einzelnen Gleichungen (A) der Ordnung nach durch die einzelnen Gleichungen (B), d. i. die erste von (A) durch die erste von B; die zweite von (A) durch die zweite von (B), u. s. w.; so findet man folgende Quotienten:

$$\frac{\psi a}{\dfrac{d\varphi b}{da}} = A;$$

$$\frac{\psi b}{\dfrac{d\varphi b}{db}} = B;$$

$$\frac{\psi c}{\frac{d\phi c}{dc}} = C;$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Aus diesem Verfahren lässt sich folgende Regel ableiten. *Man bilde aus dem gegebenen rationalen Bruche einen neuen mit unverändertem Zähler, dessen Nenner aber der Differenzial-Coëfficient der ersten Ordnung des gegebenen Nenners ist. In diesem neuen Bruche setze man nach und nach die zweiten Glieder der binomischen Faktoren des Nenners mit verändertem Zeichen, und man erhält die verlangten Theilbrüche.*

3) Dieses Verfahren wird durch nachfolgende Beispiele noch deutlicher werden.

Erstes Beispiel. Es sei:

$$\frac{6x^2 - 22x + 18}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{6x^2 - 22x + 18}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Hieraus ergiebt sich der neue Bruch, wenn man den Differenzial-Coëfficienten des Nenners nimmt,

$$\frac{6x^2 - 22x + 18}{3x^2 - 12x + 11};$$

wird hier nach und nach $x = 1, = 2, = 3$ gesetzt, so erhält man zu Zählern der Theilbrüche:

$$\text{für } x = 1 \text{ ist } \frac{6 - 22 + 18}{3 - 12 + 11} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$\text{für } x = 2 \text{ ist } \frac{24 - 44 + 18}{12 - 24 + 11} = \frac{-2}{-1} = +2;$$

$$\text{für } x = 3 \text{ ist } \frac{54 - 66 + 18}{27 - 36 + 11} = \frac{6}{2} = 3;$$

folglich

$$\frac{6x^2 - 22x + 18}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}.$$

Zweites Beispiel. Es sei der rationale Bruch

$$\frac{9x^3 + 6x^2 - 167x + 222}{x^4 - 25x^2 + 60x - 36} = \frac{9x^3 + 6x^2 - 167x + 222}{(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)}.$$

Der neue Bruch ist

$$\frac{9x^3 + 6x^2 - 167x + 222}{4x^3 - 50x + 60}.$$

Wird hier nach und nach $x = 1$, $= 2$, $= 3$, $= -6$ geschrieben, so ergeben sich die Zähler der Partialbrüche der Ordnung nach, nämlich:

für $x = 1$ ist $\frac{9 + 6 - 167 + 222}{4 - 50 + 60} = \frac{70}{14} = 5$;

für $x = 2$ ist $\frac{72 + 24 - 334 + 222}{32 - 100 + 60} = \frac{-16}{-8} = +2$;

für $x = 3$ ist $\frac{243 + 54 - 501 + 222}{108 - 150 + 60} = \frac{18}{18} = 1$;

für $x = -6$ ist $\frac{-1944 + 216 + 1002 + 222}{-864 + 300 + 60} = \frac{-504}{-504} = +1$.

Mithin

$$\frac{9x^3 + 6x^2 - 167x + 222}{x^4 - 25x^2 + 60x - 36} = \frac{5}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+6}.$$

Drittes Beispiel. Es sei die rationale Bruchfunktion

$$\frac{-x^3 + 8x^2 + 49x - 86}{x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8}$$

$$= \frac{-x^3 + 8x^2 + 49x - 86}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+4)}.$$

Man erhält für den Differenzial-Coëfficienten des Nenners:

$$4x^3 + 6x^2 - 18x - 2;$$

mithin

für $x = 1$

$$\frac{-1 + 8 + 49 - 86}{4 + 6 - 18 - 2} = \frac{-30}{-10} = +3;$$

für $x = -1$

$$\frac{1 + 8 - 49 - 86}{-4 + 6 + 18 - 2} = \frac{-126}{+18} = -7;$$

für $x = 2$

$$\frac{-8 + 32 + 98 - 86}{32 + 24 - 36 - 2} = \frac{36}{18} = 2;$$

für $x = 4$

$$\frac{64+128-196-86}{-256+96+72-2} = \frac{-90}{-90} = +1.$$

Folglich

$$\frac{-x^3+8x^2+49x-86}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+4)}$$

$$= \frac{3}{x-1} - \frac{7}{x+1} + \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+4}.$$

4) Ist nun der Zähler das Differenzial des Nenners, so ist der gegebene Bruch nothwendigerweise das Differenzial des Logarithmen des Nenners. Sind daher $x-a$, $x-b$, $x-c$, ... die Faktoren des Nenners, so ist der gegebene Bruch das Differenzial des Logarithmen von ... $(x-a)(x-b)(x-c)$... oder gleich dem Differenzial der Summe aus den Logarithmen der Faktoren; mithin die Partialbrüche

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \ldots.$$

5) Wenn ferner $\frac{\psi x}{\varphi x}$ eine rationale auf ihre kleinste Benennung gebrachte Bruchfunktion, und φx ein Produkt von m gleichen Faktoren ist; so hat man z. B.

$$\frac{\psi x}{\varphi x} = \frac{\psi(a+(x-a))}{(x-a)^m}$$

Wird der Zähler nach der Taylorschen Formel entwickelt, und die verschiedenen Glieder durch $(x-a)^m$ dividirt, so ist nach Lagrange's Bezeichnungsart

$$\frac{\psi x}{\varphi x} = \frac{\psi a}{(x-a)^m} + \frac{\psi' a}{(x-a)^{m-1}} + \frac{\frac{1}{1.2}\psi'' a}{(x-a)^{m-2}}$$

$$+ \ldots + \frac{\frac{1}{1.2.3\ldots.n}\psi^{(n)} a}{x-a} \ldots . (C).$$

Hieraus kann man folgende Regel ableiten. *Um irgend einen Theilbruch eines gegebenen rationalen Bruchs,*

dessen Nenner ein Produkt von einer gewissen Anzahl unter sich gleicher Faktoren ist, ausser der Ordnung zu erhalten, suche man den Differenzial-Coëfficienten des Zählers derjenigen Ordnung, welche durch die Differenz zwischen dem Exponenten des Nenners des gegebenen Bruches, und dem Exponenten des Nenners des verlangten Theilbruchs angezeigt wird, dividire hierauf das Resultat durch das Produkt aus soviel natürlichen Zahlen von der Einheit an gerechnet, als der Exponent der Differenziationsordnung Einheiten enthält; für x setze man alsdann das zweite Glied des Nenners.

6) Die Formel (C) lässt sich noch allgemeiner darstellen, wenn nämlich x im Nenner noch mit einem Coëfficienten behaftet vorkömmt *). Es sei $(a - bx)^m$ der Nenner der gegebenen rationalen Bruchfunktion, Y der Zähler eine Funktion von x; man schreibe $a - bx = ay$, mithin $x = \frac{a}{b} - \frac{a}{b}y$: wird r statt $\frac{a}{b}$ gesetzt, so hat man $x = r - ry$; wird durch R bezeichnet, was die Funktion Y wird, wenn darin r statt x geschrieben wird, so hat man nach der Taylorschen Formel:

$$Y = R - dRry + \tfrac{1}{2} d^2Rr^2y^2 - \tfrac{1}{6} d^3Rr^3y^3 + \ldots;$$

wird durch $a^m y^m$ oder $(a - bx)^m$ dividirt, so ist:

$$\frac{Y}{(a-bx)^m} = \frac{R}{(a-bx)^m} - \frac{dR}{b(a-bx)^{m-1}} + \frac{d^2R}{2b(a-bx)^{m-2}}$$
$$- \frac{d^3R}{6b(a-bx)^{m-3}} + \ldots \text{(D)},$$

welche Reihe abbricht, wenn Y eine ganze rationale Funktion von x ist.

Erstes Beispiel. Man verlangt die Theilbrüche der Bruchfunktion $\frac{3 + x - 2x^2 + 5x^3}{(1-x)^4}$.

*) Vergl. *Kramp arithmetique Universelle* pag. 305 §. 475.

Hier ist

$$b = 1,\ r = 1,\ Y = 3 + x - 2x^2 + 5x^3,$$

mithin

$$R = 3 + r - 2r^2 + 5r^3 = 7;$$

für den ersten Differenzial-Coëfficienten ist

$$dR = 1 - 4r + 15r^2 = 12;$$

$$d^2R = -4 + 30r = 26;$$

$$d^3R = +30;$$

folglich die Theilbrüche

$$\frac{7}{(1-x)^4} - \frac{12}{(1-x)^3} + \frac{13}{(1-x)^2} - \frac{5}{1-x}.$$

Dieselben Brüche ergeben sich auch nach der Formel (C), man darf nur $-(x-1)$ statt $1-x$ setzen, da dann für die geraden Potenzen von $x-1$ die Theilbrüche positiv, für die ungraden negativ werden.

Zweites Beispiel. Man suche die Theilbrüche von

$$\frac{3x^2 - 4x + 2}{(x-1)^3}.$$

Hier ist

$$r = 1;\ b = -1;\ Y = 3x^2 - 4x + 2$$

und

$$R = 3r^2 - 4x + 2 = 1;\ dR = 6r - 4 = 2;$$

$$d^2R = 6;$$

folglich die Theilbrüche

$$\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1}.$$

Drittes Beispiel. Es werden die Theilbrüche von

$$\frac{20x^2 - 66x + 59}{(3-2x)^3}$$

gesucht.

Hier hat man $b = 2,\ r = 3/_2,$

$$R = 20r^2 - 66r + 59 = 5,$$

$$dR = 40r - 66 = -6,$$

$$d^2R = 40;$$

folglich die Theilbrüche

$$\frac{5}{(3-2x)^3} + \frac{3}{(3-2x)^2} + \frac{5}{3-2x}.$$

7) Diese Formel (D) hat noch den Vortheil, dass man zugleich den ganzen Quotienten erhält, wenn der Zähler um eine oder um mehrere Dimensionen höher als der Nenner ist. Wäre z. B. gegeben:

$$\frac{5 - 7x + 4x^2 - 10x^3 + x^4}{(4 + x)^3},$$

und dieser Bruch mit der Formel (D) verglichen; so ist

$$a = 4, \; b = -1,$$

also

$$r = -4; \; R = 5 - 7r + 4r^2 - 10r^3 + r^4 = 99^3,$$

$$dR = -7 + 8r - 30r^2 + 4r^3 = -775;$$

$$d^2R = 8 - 60r + 12r^2 = 440;$$

$$d^3R = -60 + 24r = -156;$$

$$d^4R = +24.$$

Daher die Theilbrüche

$$\frac{993}{(4+x)^3} - \frac{775}{(4+x)^2} + \frac{220}{4+x} - 26 + \frac{24}{24(4+x)^{-1}}$$

$$= \frac{993}{(4+x)^3} - \frac{775}{(4+x)^2} + \frac{220}{4+x} - 22 + x.$$

8) Wir gehen zum letzten Falle über, in welchem nämlich einige Faktoren gleich, die andern aber von diesen verschieden und unter sich ungleich sind. Es sei daher

$$\varphi x = (x - a)^m fx,$$

wo fx auch Faktoren enthalten kann, die unter sich gleich sind, jedoch keinen von der Form x — a; denn wenn in fx Faktoren vorkommen, welche zwar verschieden von x — a, aber unter sich gleich sein können, so braucht man nur dasjenige zu wiederholen, was für $\varphi = (x - a)^m fx$ gesagt wird. Ist der Zähler eine Funktion von x, so kann sie von der Form ψx sein; alsdann hat man:

$$\frac{\psi x}{\varphi x} = \frac{1}{(x - a)^{m-1}} \cdot \frac{\psi x}{(x - a)\, fx}.$$

Da man annimmt, dass der Nenner des gegebenen Bruches wenigstens um eine Dimension höher ist, als der

Zähler, so braucht man nicht zu erinnern, dass in $\frac{\psi x}{(x-a)fx}$ die höchste Dimension des Zählers ψx die höchste des Nenners übertrifft; man kann daher den Nenner ψx so lange durch den Nenner dividiren, bis man auf einen Rest stösst, worin der Nenner eine Dimension höher ist, als der Zähler. Ist nun Q der ganze Quotient, und R der Rest, so hat man:

$$\frac{\psi x}{\varphi x} = \frac{1}{(x-a)^{m-1}} \left\{ Q + \frac{R}{(x-a)fx} \right\}.$$

Macht man

$$\frac{R}{(x-a)fx} = \frac{A}{x-a} + \frac{S}{fx},$$

was nach Art. 2 dieses Zusatzes schon geschehen kann, und der Kürze halber

$$Qfx + S = X;$$

so erhält man:

$$\frac{\psi x}{\varphi x} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{X}{(x-a)^{m-1}fx};$$

eben so ist

$$\frac{X}{(x-a)^{m-1}fx} = \frac{B}{(x-a)^{m-1}} + \frac{X'}{(x-a)^{m-2}fx};$$

fährt man so fort, so gelangt man endlich zu einem Bruche, dessen Nenner $(x-a)^0 fx = fx$, und der übrigbleibende Bruch selbst wird von der Form $\frac{\Phi x}{fx}$ sein. Man hat daher

$$\frac{\psi x}{\varphi x} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{B}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{\Phi x}{fx},$$

d. h. jede rationale Bruchfunktion, derer Nenner einen Faktor enthält, der zu irgend einer Potenz erhoben ist (man versteht hier nur binomische Faktoren) lässt sich in eine Reihe Theilbrüche zerlegen, derer Zähler constant, die Nenner aber die um eine Einheit abnehmenden Potenzen des zu einer gewissen Potenz erhobenen binomischen Faktors sind, nebst einem Bruche, dessen

Zähler die Veränderliche enthalten kann, der Nenner aber ein Produkt von ungleichen Faktoren ist.

9) Wir wollen für diesen Fall noch ein bequemeres Verfahren auffinden. Man lasse ψx den Zähler und $\varphi x = (x - a)^m fx$ sein, und setze:

$$\frac{\psi x}{\varphi x} = \frac{Fx}{(x-a)^m} + \frac{\Phi x}{fx},$$

da dann das erste Glied des zweiten Theils auf Art. 5 dieses Zusatzes und das zweite Glied auf Art. 2 zurückgebracht wäre, wenn sich in fx alle Faktoren ungleich fänden; wären einige gleiche darunter, so würde man den letzten Bruch der vorigen Gleichung nach dem gegenwärtigen Falle behandeln.

Alles dieses hängt davon ab, dass Fx und fx entwickelt werden. Zu diesem Entzwecke setze man $a + y$ statt x, hebe die Nenner auf, und man hat:

$$\psi(a+y) = \psi a + \frac{y}{1}\psi' a + \frac{y^2}{1.2}\psi'' a + \ldots$$
$$= \left\{Fa + \frac{y}{1}F'a + \frac{y^2}{1.2}F''a + \cdots\right\}$$
$$\left\{fa + \frac{y}{1}f'x + \frac{y^2}{1.2}f''x + \cdots\right\}$$
$$+ y^m\left\{\Phi a + \frac{y}{1}\Phi' a + \frac{y^2}{1.2}\Phi'' a + \cdots\right\}.$$

Wird die hier angezeigte Multiplication wirklich vorgenommen, und die Coëfficienten gleicher Potenzen von y unter sich gleich gesetzt, so erhält man:

$$\psi a = faFa;$$
$$\psi' a = faF'a + f'aFa;$$
$$\psi'' a = faF''a + 2f'aF'a + f''aF'a;$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\psi^{(n)}a = faF^{(n)}a + \frac{n}{1}f'aF^{(n-1)}a$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}f''aF^{(n-2)}a + \ldots$$

wo immer n kleiner als m angenommen wird, wie wir schon vorhin bemerkten. Da ψx und φx gegeben sind; so lassen sich Fa, F'a, F''a, ... oder die Zähler der Theilbrüche von $\frac{Fx}{(x-a)^m}$; wie auch fa, f'a, f''a, ... leicht bestimmen; denn es ist:

$$Fx = F(a + (x-a))$$
$$= Fa + \frac{x-a}{1} F'a + \frac{(x-a)^2}{1.2} F''a + \ldots$$

und

$$\Phi x = \frac{\psi x - fxFx}{(x-a)^m}.$$

10) Durch folgendes Beispiel wird dieses Verfahren in volles Licht gesetzt.

Erstes Beispiel. Es sei die rationale Bruchfunktion

$$\frac{9x^6 - 94x^5 + 383x^4 - 787x^3 + 891x^2 - 576x + 192}{(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-4)}.$$

Hier ist

$$\psi x = 9x^6 - 94x^5 + 383x^4 - 787x^3 + 891x^2 - 576x + 192$$
$$\varphi x = (x-1)^2(x-2)^2(x-3)(x-4);$$
$$a = 1;$$
$$fx = (x-1)^2(x-3)(x-4) = x^4 - 11x^3 + 44x^2 - 76x + 48;$$

mithin

$$\psi' x = 54x^5 - 470x^4 + 1532x^3 - 2361x^2 + 1782x - 576;$$
$$\psi'' x = 270x^4 - 1880x^3 + 4596x^2 - 4722x + 1782;$$
$$f'x = 4x^3 - 33x^2 + 88x - 76;$$
$$f''x = 12x^2 - 66x + 88.$$

Nun schreibe man in den Zähler des gegebenen Bruches und in die eben entwickelten Differenzial-Quotienten 1 für x, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\psi a = 18;\ \psi' a = -39;\ \psi'' a = 46;$$
$$fa = 6;\ f'a = -17;\ f''a = 34;$$

daher

$$18 = 6Fa$$
$$-39 = 6F'a + 17Fa$$
$$46 = 6F''a - 34F'a + 34Fa;$$

uud hieraus

$$Fa = 3;\ F'a = 2;\ F''a = 2.$$

Folglich

$$Fx = 3 + 2(x - 1) + (x - 1)^2 = x^2 + 2;$$

$$fxFx = x^6 - 12x^5 + 46x^4 - 98x^3 + 136x^2 - 152x + 96;$$

$$\psi x - fxFx = 8x^6 - 83x^5 + 337x^4 - 689x^3 + 755x^2 - 424x + 96;$$

$$\Phi x = \frac{\psi x - fxFx}{(x-a)^m} = 8x^3 - 59x^2 + 136x - 96;$$

und endlich

$$\frac{\psi x}{\varphi x} = \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{8x^3 - 59x^2 + 136x - 96}{(x-2)^2(x-3)(x-4)}.$$

Wird auf das letzte Glied zur Rechten des Gleichheitszeichens das nämliche Verfahren angewendet; so erhalten wir:

$$,\psi x = 8x^3 - 59x^2 + 136x - 96;$$

$$,\varphi x = (x - 2)^2 (x - 3)(x - 4);$$

$$a = 2;$$

$$f,x = (x - 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12;$$

folglich

$$,\psi' x = 24x^2 - 118x + 136;$$

$$f,'x = 2x - 7;$$

mithin

$$,\psi a = 4;\ ,\psi' a = -4;$$

$$f,a = 2;\ f,'a = -3;$$

hieraus leitet man ab:

$$4 = 2F,a;\ \text{folglich}\ F,a = 2;$$

$$-4 = 2F,'a - 3F,a;$$

$$= 2F,'a - 6;\ \text{folglich}\ F,'a = 1;$$

mithin

$$F,x = F,(2 + (x - 2)) = 2 + x - 2 = x;$$

und

$$f,xF,x = (x^2 - 7x + 12)\,x = x^3 - 7x^2 + 12x;$$

$$\psi,x - f,xF,x = 7x^3 - 52x^2 + 124x - 96;$$

daher

$$\Phi,x = 7x - 24;$$

und endlich

$$\frac{8x^3 - 59x^2 + 136x - 96}{(x-2)^2(x-3)(x-4)} = \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x-3} + \frac{4}{x-4}.$$

Wird diese Reihe von Brüchen in die Partial Brüche von $\frac{\psi x}{\varphi x}$ eingeführt, so ist:

$$\frac{\psi x}{\varphi x}$$

$$= \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2}$$

$$+ \frac{3}{x-3} + \frac{4}{x-4}.$$

Zweiter Zusatz.

1) Man untersuche, ob die Curve der Gleichung

$$ay^3 - x^3y - bx^3 = o$$

vielfache Punkte habe. Man hat zu diesem Ende

$$(3ay^2 - x^3)\frac{dy}{dx} - 3x^2(y+b) = o,$$

$$6ay\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6x^2\frac{dy}{dx} - 6x(y+b) = o;$$

$$6a\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 18x\frac{dy}{dx} - 6y - 6b = o,$$

indem man die Glieder in D. $\frac{dy}{dx}$, D. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ vernachlässigt. Man hat daher die Gleichungen:

$$3ay^2 - x^3 = o,\ x^2(y+b) = o;$$

aus letzterer erhält man $y = -b$; und wenn dieser Werth in die erstere eingeführt wird $x = \sqrt{3ab^2}$, welche Werthe der gegebenen Gleichung kein Genüge leisten. Weil für $x = o$, $y = o$ die Gleichung aufgelöst ist, könnte etwa der Anfangspunkt der Coordinaten ein vielfacher sein. Für diesen Punkt aber ver-

schwinden alle Glieder der abgeleiteten Gleichung der zweiten Ordnung; die abgeleitete Gleichung der dritten Ordnung giebt:

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = b,$$

woraus man nur eine reelle Wurzel für $\frac{dy}{dx}$ erhält, und dies zeigt an, dass die Curve keinen vielfachen Punkt habe.

2) Es sei

$$y^4 - x^5 + x^4 + 3x^2y^2 = o,$$

hieraus ergiebt sich:

$$2y\frac{dy}{dx}(2y^2 + 3x^2) + 4x^3 - 5x^4 + 6y^2x = o.$$

Setzt man

$$y(2y^2 + 3x^2) = o, \quad x(4x^2 - 5x^4 + 6y^2) = o,$$

so findet man, dass $x = o$, $y = o$ die einzigen Auflösungen dieser beiden Gleichungen und der gegebenen sind. Die abgeleiteten Gleichungen der zweiten und dritten Ordnung sind alsdann an und für sich Null; die der vierten Ordnung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = o,$$

derer Wurzeln imaginär sind; der Anfangspunkt ist also ein beigeordneter. (Art. 142.)

3) Es sei ferner

$$x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = o.$$

Nachdem man die abgeleiteten Gleichungen der ersten und der zweiten Ordnung gebildet hat, nämlich:

$$-6a(y+a)y\frac{dy}{dx} + 4x(x^2 - a^2) = o,$$

$$-3a(y+a)y\frac{d^2y}{dx^2} - 3a(2y+a)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6x^9 - 2a^2 = o,$$

setze man

$$(y+a)y = o, \quad x(x^2 - a^2) = o,$$

und man findet:

$$y = o \text{ und } x = \pm a$$
$$y = -a \text{ und } x = o,$$

welche die einzigen Auflösungen dieser und der gegebenen Gleichung sind. Denn für $x = o$ erhält man die Wurzeln $y = -a$, und $y = \frac{1}{2} a$. Den Werthen $x = o$ und $y = -a$ entspricht $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, und der doppelte Punkt E, Fig. 1; ferner $x = \pm a$ giebt die doppelten Punkte D und D′. Im Punkte E hat man $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, in den Punkten D und D′ aber $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{4}{3}}$.

Man kennt also in diesen Punkten die Neigungen der Aeste zur Axe der Abscissen. Nimmt man indess zu $x = o$ die Ordinate $y = \frac{1}{2} a$, und zu $x = \pm a$ die Ordinate $y = -\frac{3}{2} a$, wodurch man $\frac{dy}{dx} = o$ erhält, so können diese Abscissen *Grösste* oder *Kleinste* für die Ordinaten anzeigen; für $x = o$ giebt die abgeleitete der zweiten Ordnung $\frac{d^2y}{dx^2} < o$, folglich die Ordinate AF ein *Maximum.* Für die Abscissen $x = \pm a$ findet man $\frac{d^2y}{dx^2} > o$, daher die Ordinaten DH, D′O *Minima*, weil die grössten negativen Ordinaten als die kleinsten müssen angesehen werden, in so fern als sie mehr dem unendlich Negativen sich nähern. Endlich $\frac{dy}{dx} = \infty$, d. h.

$$y(y + a) = o$$

giebt die Punkte K und G, in welchen die Tangente zur Axe der y parallel ist, und diese Punkte entsprechen dem $y = -a$, und $x = \pm a\sqrt{2} = AC = AB$, so dass $CK = BG = AE$.

Man kann noch untersuchen, ob die Curven der Gleichungen

$$x^4 + 2ax^2y - ay^3 = o$$

und

$$y^4 - axy^2 + x^4 = o$$

vielfache Punkte haben.

Ferner discutire man die Gleichungen,

$$y^4 + x^4 - 3ay^3 + 2bx^2y = o,$$

welche einer Curve angehört, die im Anfangspunkt einen dreifachen Punkt hat; und endlich noch:

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = o.$$

Dritter Zusatz.

1) Die ebenen Curven gehören der Geometrie von zwei Dimensionen an, hängen folglich nur von zwei Coordinaten ab. Die Curven mit doppelter Krümmung, d. i. solcher, die nicht in einer Ebene sich befinden, oder welche nur auf der Oberfläche der Körper gezogen werden können, sind das Eigenthum der Geometrie, welche Gegenstände von drei Dimensionen betrachtet, hängen also von drei zu einander senkrechten Coordinaten ab, wovon zwei Funktionen der dritten sind. Diese Curven sind durch zwei Projectionen auf zwei von den drei rechtwinklichten Ebenen bestimmt; denn denkt man sich zwei Cylinder, welche auf die Ebenen dieser Projectionen senkrecht sind, und zu Grundflächen diese Projectionen selbst haben; so ist der Durchschnitt dieser cylindrischen Oberflächen die Curve mit doppelter Krümmung.

Die krummen Flächen sind auch durch drei rechtwinkliche Coordinaten bestimmt, wie die Linien mit doppelter Krümmung, aber mit dem Unterschiede, dass bei den krummen Flächen zwei von diesen Coordinaten von einander unabhängig sind, und die drittere eine Funktion dieser zweien ist, so dass also eine Fläche durch eine einzige Gleichung zwischen drei Coordinaten vorgestellt wird, und die beiden Gleichungen, welche eine Curve mit doppelter Krümmung ausdrücken, jede für

sich eine krumme cylinderförmige Fläche bezeichnet, welche zur Ebene der Grundfläche senkrecht, von der man weiss, dass sie die Gleichung jene der Grundfläche ist; die Curve durch den Zusammenhang dieser beiden Gleichungen bezeichnet, wird durch den Durchschnitt zweier Flächen gebildet.

2) Nach diesen Begriffen ist es nun nicht mehr schwer, einzusehen, dass die Tangente an irgend einen Punkt einer Curve mit doppelter Krümmung der Durchschnitt zweier Ebenen ist, welche die cylindrischen Flächen berühren, die zu Grundflächen die beiden Projectionen der Curve mit doppelter Krümmung haben; die beiden Projectionen aber dieser Tangente, sind die Tangenten an die beiden Projectionen der Curve mit doppelter Krümmung, in den Punkten, welche als die Projectionen desjenigen Punktes angesehen werden, welchen man im Raume betrachtet. Es ist also hinreichend, die Gleichungen der beiden Projectionen der Tangente zu beschreiben.

3) Es seien

$$y = fx, \; z = \varphi x$$

die Gleichungen der Projectionen einer Curve mit doppelter Krümmung auf die Ebenen der (x, y) und der (x, z); ferner

$$q = ap + b, \; s = cp + g$$

die Gleichungen der Projectionen einer Geraden im Raume auf die nämlichen Ebenen. Damit diese Gerade eine berührende sei zur vorgegebenen Curve, so müssen die Gerade und die Curve einen gemeinschaftlichen Punkt haben, oder es muss $p = x$, $q = y$, $s = z$ sein; die Gleichungen der geraden Linien werden mithin

$$y = ax + b, \; z = cx + g;$$

ferner muss noch

$$a = \frac{dy}{dx}, \; c = \frac{dz}{dx}$$

sein; die beiden vorhergehenden Gleichungen geben nach vorgenommener Substitution dieser Werthe:

$$b = y - \frac{dy}{dx} x, \; g = z - \frac{dz}{dx} x,$$

so, dass also die Gleichungen der Tangente an die Curve mit doppelter Krümmung am Punkte (x, y, z) sein werden

$$q - y = \frac{dy}{dx} (p - x), \; s - z = \frac{dz}{dx} (p - x),$$

indem p, q, s die allgemeinen Coordinaten der Tangente sind. Jede dieser Gleichungen ist jene einer Projection der Tangente an den Punkt x, y und z.

Die Lage der Normalebene (d. i. derjenigen Ebene, welche durch den Berührungspunkt senkrecht zur Tangente gelegt ist) ist nicht mehr schwer zu finden. Man hat

$$(s - z) \frac{dz}{dx} + (q - y) \frac{dy}{dx} + p - x = o,$$

für die Gleichung der Normalebene, wo s, q und p die allgemeinen Coordinaten bedeuten.

3) Zur leichtern Bestimmung der allgemeinen Gleichung eines Kreises in irgend einer Ebene, erwähle man eine Kugel, lasse durch ihren Mittelpunkt eine Ebene gehen, so ist diese Ebene jene des Kreises, und der Halbmesser der Kugel wird zugleich der Halbmesser des Kreises; auf diesem Wege gelangt man zum Krümmungshalbmesser einer Curve mit doppelter Krümmung. Man nehme daher die allgemeine Gleichung der Kugel auf die drei Coordinaten p, q, s bezogen

$$(p - a)^2 + (q - b)^2 + (s - c) = r^2$$

wo a, b, c die Coordinaten des Mittelpunktes, und r der Halbmesser ist. Die Gleichung einer Ebene auf die nämlichen Coordinaten bezogen, und die durch die Punkte a, b, c gelegt ist, wird allgemein dargestellt durch

$$(p - a) + m (q - b) + n (s - c) = o,$$

wo m und n zwei willkührliche Constanten sind, welche

die Neigung der Ebene zu den coordinaten Ebenen bestimmen. Der Zusammenhang dieser beiden Gleichungen stellt also einen Kreis vor, dessen Halbmesser r, dessen Mittelpunkt durch a, b, c, gegeben ist, und dessen Ebene von den Grössen m und n abhängt.

Vertauscht man also in diesen Gleichungen p, q, s gegen x, y, z, welches die Coordinaten eines besondern Punktes der Curve mit doppelter Krümmung sind, so bezeichnet man dadurch, dass der Kreis und die Curve mit doppelter Krümmung einen gemeinschaftlichen Punkt haben; da dann folgende Gleichungen hervorgehen:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 \quad \ldots (1)$$

$$x - a + m\,(y - b) + n\,(z - c) = o \quad \ldots (2).$$

Differenziirt man zweimal nach einander, und bemerkt, dass da $y = fx$, $z = \varphi x$ die Coordinaten y und z Funktionen von x sind, so gelangt man zu folgenden Gleichungen:

$$x - a\,\frac{dy}{dx}(y - b) + \frac{dz}{dx}(z - c) = o \quad \ldots (3)$$

$$1 + m\,\frac{dy}{dx} + n\,\frac{dz}{dx} = o \quad \ldots (4)$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2}(y - b) + \frac{d^2z}{dx^2}(z - c) = o. (5)$$

$$m\,\frac{d^2y}{dx^2} + n\,\frac{d^2z}{dx^2} = o \quad \ldots\ldots (6).$$

Da in diesen Gleichungen sechs unbestimmte Grös-a, b, c, r, m, n sich vorfinden, so kann allen Bedingungen Genüge geleistet werden, nämlich durch die vier ersten dieser Gleichungen, dass der Kreis einen Berührungspunkt der ersten Ordnung mit jeder Curve von doppelter Krümmung habe, und wenn man alle zusammennimmt, dass ein Berührungspunkt der zweiten Ordnung Statt finde, oder dass der Kreis ein Krümmungskreis der Curve werde, hiedurch wird auch die Lage und Grösse dieses Kreises bestimmt. Will man aber nur einen berührenden Kreis haben, so bleiben zwei Unbestimmten übrig, für welche man den Krümmungshalb-

messer r und eine von den zwei Grössen m und n, welche die Lage der Ebene des berührenden Kreises bestimmen, nehmen kann.

Betrachtet man nun den Berührungspunkt der zweiten Ordnung, so liefern die Gleichungen (1), (2), (3),

$$x - a = \frac{\left(n\frac{dy}{dx} - m\frac{dz}{dx}\right)r}{R},$$

$$y - b = -\frac{\left(n - \frac{dz}{dx}\right)r}{R},$$

$$z - c = \frac{\left(m - \frac{dy}{dx}\right)r}{R},$$

indem man der Kürze wegen setzt:

$$R = \sqrt{\left\{\left(n\frac{dy}{dx} - m\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(n - \frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(m - \frac{dy}{dx}\right)^2\right\}};$$

werden diese Werthe in die Gleichung (5) eingeführt, so kann man daraus ableiten:

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]R}{\left(n - \frac{dz}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} - \left(m - \frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2z}{dx}};$$

letztlich geben die Gleichungen (4) und (6):

$$m = \frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$n = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}},$$

führt man diese Werthe in die vorhergehenden Gleichungen ein, und macht die nöthigen Reductionen, so erhält man:

$$z = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\sqrt{\left\{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\left(\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2\right)-\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2\right\}}}$$

$$a = x - \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\left(\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2\right)-\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2}$$

$$b = y + \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\left(\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2\right)-\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2},$$

$$c = z + \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{dz}{dx}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\left(\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2\right)-\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2}.$$

Die Grösse r ist der Krümmungshalbmesser der vorgelegten Curve; a, b und c sind die Curven-Coordinaten für die Mittelpunkte der Krümmungskreise, ohne dass jedoch diese Curve eine Evolute sei, wie dieses der Fall ist bei den Curven mit einfacher Krümmung. (Vergl. Calcul diff. par *Garnier* pag. 342 sq.)

Vierter Zusatz.

Ich theile hier einen Auszug aus einem Werke von H. *Monge* mit, welches betitelt ist: *Théorie des surfaces courbes et des surfaces des courbes à double courbure* pag. 342 sq., ein Werk, das seinem Verfasser die Unsterblichkeit erworben hat. Vor ihm hat wohl schon *Clairaut* die Curven mit doppelter Krümmung betrachtet. —

Lehrsatz. Wenn man sich durch den Mittelpunkt eines Kreises senkrecht auf seine Ebene eine gerade Linie ober- und unterhalb unendlich verlängert, und aus irgend einem Punkte dieser Geraden eine Linie an einen Punkt des Umkreises gezogen denkt, so wird diese Linie, um die Senkrechte als Axe unter einem beständigen Winkel mit dieser Axe sich drehend, mit ihrem Endpunkte den Umkreis des Zirkels beschreiben. Der auf der Axe willkührlich angenommene Punkt ist ein Pol des Kreises. Nimmt man also auf dieser Axe in gleicher Entfernung von der Ebene des Kreises zwei Pole, den einen ober- den andern unterhalb, und führt durch diese beiden Punkte zwei gerade Linien, welche sich in einem Punkte des Umkreises schneiden; lässt man ferner diese beiden Geraden zugleich unter einem unveränderlichen Winkel, welchen jede mit der Axe bildet, um diese Axe sich drehen; so beschreibt ihr Durchschnittspunkt den Umkreis des Zirkels.

Es sei KAaD, Fig. II, irgend eine Curve mit doppelter Krümmung im Raume gezogen; durch einen Punkt A dieser Curve sei eine Ebene MNOP senkrecht zur Tangente in A gelegt; durch einen unendlich nahen Punkt a, gehe eine andere Ebene mnOP ebenfalls senkrecht zur Tangente in a; diese beiden Ebenen werden sich irgendwo in einer geraden Linie OP schneiden, welche die Axe desjenigen Kreises sein wird, wovon der kleine Bogen Aa der Curve als ein Theil angesehen werden kann, so dass wenn man von diesen Punkten A und a die Senkrechten AG und aG auf die gerade Linie herablässt, diese sich in einem Punkte G begegnen

müssen, welches der Mittelpunkt dies s Kreises sein wird. Alle übrigen Punkte g, g′, g″, . . . der Linie OP werden gleichweit von allen Punkten dieses unendlich kleinen Bogens Aa entfernt sein, können mithin als Pole betrachtet werden. Wenn man also von irgend einem Punkte g dieser Axe zwei Geraden gA und ga an die Punkte A und a zieht, so bilden sie mit der Axe gleiche Winkel AgA und agO, so dass, wenn man die Krümmung der Curve im Punkte A bestimmen wollte, man die Länge AG als den Halbmesser des Krümmungskreises annehmen müsste. Wollte man die Seite der Krümmung angeben, so müsste man die Lage des Centrums G im Raume bestimmen, von woaus in seiner Ebene man den Bogen Aa beschreibt; sollte man aber schlechtweg diesen Bogen beschreiben, so wäre es hinreichend, entweder die Gerade Ag unter denselben Winkel um die Axe oder den Halbmesser AG senkrecht zu dieser Axe sich drehen zu lassen.

Die Gerade OP kann also als Pollinie des Elements Aa angesehen werden; das Centrum G der Krümmung dieses Elements ist das Centrum seiner Pole, dessen Entfernung vom Elemente ein *Kleinstes* ist; der Krümmungshalbmesser ist die vom Elemente auf die Pollinie herabgefällte Senkrechte AG.

Um nun auf alle Punkte der Curve mit doppelter Krümmung das Verfahren anzuwenden, welches so eben für eines ihrer Elemente statt fand, d. i. um durch alle ihre aufeinanderfolgenden Punkte Ebenen MNOP, Fig. III, zu legen, wovon jede senkrecht ist zur Tangente der Curve an jenen Punkt, in welchem sie durch die Ebene geschnitten ist; so muss die erstere dieser Ebenen der zweiteren in einer geraden Linie OP begegnen, welche der Ort der Pole des Bogens AA′ sein wird. Die zweite Ebene muss der dritten in einer geraden Linie O′P′ dem Orte der Pole des Bogens A′A″; die dritte der vierten in der geraden Linie O″P″, dem Orte der Pole des Bogens A″A‴, u. s. w. begegnen. Es ist offenbar, dass alle diese Durchschnittslinien sich unendlich nahe sind,

oder dass die durch ihre Vereinigung gebildete krumme Fläche der geometrische Ort der Pole der Curve KAA′A″ D sein wird.

Obgleich die Natur dieser krummen Fläche durchaus von jener der Curve KAA′A″ D abhängt, so haben doch alle Flächen, welche auf diese Art erzeugt werden, ein gemeinschaftliches Merkmal, welches darin besteht, dass sie auf einer Ebene können abgewickelt werden, wie die conischen und cylindrischen Flächen.

Die Elemente OPP′O′, O′P′P″O″, etc. woraus die Fläche besteht, sind in der That Theile von unendlich langen und unendlich schmalen Ebenen, die sich alle stufenweise in geraden Linien schneiden. Dieses festgesetzt kann man immer annehmen, dass das erste Element OPP′O′ gleichsam um die gerade Linie O′P gewunden werde, bis es zur Ebene des folgenden Elements O′P′P″O″ gelangt; dass sie alsdann miteinander, gleichsam nur eine Ebene bildend, um O″P″ sich winden, bis dieses Element in die Ebene des dritten O″P″ P‴O‴ u. s. w. gekommen ist. Alle Elemente der Fläche lassen sich also ununterbrochen in eine Ebene bringen, *mithin ist die Fläche der Pole einer Curve mit doppelter Krümmung immer eine evolvirende Fläche,*

Lehrsatz. Jede ebene Curve oder mit doppelter Krümmung hat unendlich viele Evoluten, derer geometrischer Ort ebenfalls eine Fläche der Pole dieser Curve ist, die einzige, welche die Evoluten der gegebenen in sich enthält.

Beweis. Aus dem Punkte A der Curve, durch welchen die erste Normal-Ebene gelegt ist, gehe in dieser Ebene nach willkührlicher Richtung eine gerade Linie Ag, welche verlängert irgendwo dem Schnitte OP begegnet z. B. im Punkte g. Durch die Punkte A′ und g gehe in der zweiten Normal-Ebene die gerade Linie A′g, welche verlängert der Durchschnittslinie O′P′ im Punkte g′ begegnet. Ferner sei auch in der dritten Normal-Ebene die gerade Linie A″g′g″ bis zur Durch-

schnittslinie $O''P''$, u. s. w. gezogen. Ich behaupte, dass die Curve, welche durch die Punkte $gg'g''$ geht, eine Evolute der Curve KAD ist. Wirklich sind 1°. alle Geraden Ag, $A'g'$, $A''g''$, Tangenten an die Curve $gg'g''$ weil sie die Verlängerungen der Elemente dieser Curve sind.

2°. Bemerkt man, dass die erste Tangente Ag während sie sich um den Punkt dreht, um sich auf die folgende $A'g$ zu legen, nicht aufhört, Tangente der Curve $gg'g''$ zu sein, und der Endpunkt A fällt auf den Endpunkt A' der zweiten Tangente $A'g'$, nachdem er den Bogen AA' beschrieben hat. Lässt man ebenso die zweite Linie $A'g'$ um den Punkt g' sich drehen, damit sie auf die dritte $A''g'$ zu liegen komme; so wird diese ebenfalls unaufhörlich die Curve $gg'g''$ berühren, und der Endpunkt A tritt nicht aus dem Bogen $A'A''$; u. s. w. Die Curve $gg'g''$. . . ist also von der Art, dass wenn man eine der Tangenten um diese Curve bewegt denkt, ohne dass sie aufhört Tangente zu ihr zu sein, und ohne dass sie der Länge nach sich bewegt, so beschreibt einer der Punkte der Tangenten die Curve KAA' D, die also eine Evolute ist. Allein die Richtung der erstern geraden Linie Ag war willkührlich; und was auch dieses für eine Richtung in der Normal-Ebene gewesen sein mag, so würde man eine andere Curve $gg'g''$ erhalten haben, welche ebenfalls eine der Evoluten von KAA' . . . D gewesen wäre. Folglich

Hier findet noch folgende Bemerkung Statt. Es sind nämlich alle Ebenen MNOP Tangenten zur Abwicklungsfläche, indem jede von ihnen die Verlängerung eines ihrer Elemente $POO'P'$, $P'O'O''P''$, ... ist; hieraus folgt, dass auch die gerade Linie Ag, welche in jedem Momente ihrer Bewegung in einer dieser Ebene sich befindet, nothwendigerweise eine berührende dieser Fläche ist.

Lehrsatz. Wenn man von dem Punkte A auf OP die Senkrechte AG herablässt; vom Puntke A' auf

O′P′ die Senkrechte A′G′; vom Punkte A″ auf O″P″ die Senkrechte A″G″, u. s. w., so ist zu beweisen, dass die Curve GG′G″ welche die Mittelpunkte der Krümmungen KA D enthält, keine Evolute der vorgegebenen, dass wenigstens die vorgegebene keine ebene Curve sei.

Beweis. Ist's eine Curve mit doppelter Krümmung, so sind zwei aufeinanderfolgende Tangenten, d. i. zwei Tangenten an die beiden Endpunkte desselben Elements, auf welcher Seite es auch genommen wird, stets in der nämlichen Ebene; drei Tangenten hingegen, die aufeinander folgen, können nicht mehr in derselben Ebene liegen, weil zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Elemente einer solchen Curve nicht mehr in derselben Ebene sich befinden können; drei Ebenen also, wovon jede Normal-Ebene zur Curve ist, können nicht senkrecht zu derselben Ebene, folglich die Durchschnittslinie der ersten mit der zweiten Ebene nicht parallel zur Durchschnittslinie der zweiten mit der dritten Ebene sein. Mithin können bei einer Curve mit doppelter Krümmung die geraden Linien OP, O′P′, O″P″, . . . nicht unter sich parallel sein. Dieses festgesetzt wird A′G zu OP senkrecht sein, wenn es AG ist, indem G das Centrum des kleinen Elementarbogens A′A ist. Diese Gerade A′G, die nach K verlängert wird zu O′P′ nicht senkrecht, also verschieden von der Geraden A′G′ sein, welche von dem Punkte A′ auf O′P′ senkrecht herabgefällt ist; die beiden geraden Linien also, oder die beiden aufeinanderfolgenden Normalen AG und A′G′ werden der Geraden OP nicht in demselben Punkte begegnen; allein zwei gerade Linien in verschiedenen Ebenen betrachtet, können sich nur in der Durchschnittslinie dieser zweien Ebenen begegnen; folglich begegnen sich die Geraden AG, A′G′ nicht, liegen also auch nicht in derselben Ebene. Dasselbe gilt von den Geraden A′G′, A″G″, A‴G‴, . . . die nacheinander zwei und zwei betrachtet werden; alle diese Geraden können mithin nicht aufeinanderfolgende Tangenten einer und

der nämlichen Curve sein, weil sonst die geraden Linien AG, A′G′ in der nämlichen Ebene liegen müssten. Hieraus folgt auch, dass wenn eine gerade Linie eine Tangente der Curve GG′G″ . . . im Punkte G′, oder Tangente des Elements GG′ ist, diese Gerade nicht durch den Punkt A′ gehen werde, sobald sie aber auf der zweiten Normal-Ebene ist, könnte sie die Curve KA D nur in dem Punkte A′ schneiden, wo sie selbst von der Ebene geschnitten wird; die Curve GG′G″ ist also von der Art, dass keine ihrer verlängerten Tangenten der Curve KAA′A″ D begegnet, folglich kann die Reihe Punkte GG′G″ keine von ihren Evoluten sein.

Wäre die Curve KA D eine Ebene, so ständen alle geraden Linien OP, O′P′, O″P″, ... auf der Ebene der Curve senkrecht auf, wären mithin unter sich parallel. Diese Geraden, oder Normalen AG, A′G′, A″G″, ... lägen alle in der Ebene der Curve, und begegneten sich nach und nach in der Curve GG′G″. . ., wären also Tangenten zu ihr; und diese Curve wäre nichts anders als jene, welche man als Evolute der Curve KA D angesehen hat.

Lehrsatz. Man wird eine der Evoluten irgend einer ebenen oder einer Curve mit doppelter Krümmung haben, wenn man durch einen ihrer Punkte und nach irgend einer Richtung eine Tangente an die Umwicklungsfläche zieht, welche der Ort ihrer Pole ist, und man biegt frei über diese Fläche die Verlängerung dieser Tangente, nämlich so, dass din Curve gg′g″ . . . jene ist, welche eine über eine Fläche frei hingebogene und nach der ersten Richtung Ag gehende Gerade auf der Fläche OPP‴O‴ bilden würde.

Um dies zu beweisen, bemerke man, was mit einer graden Linie oder mit einem Faden geschieht, welcher frei über eine Fläche ausgespannt ist. Dieser Faden kann so betrachtet werden, als hätte er eine unendlich kleine Breite, oder als hätte er gar keine. Es seien OPP″O″ zwei ebene aufeinander folgenden Elemente

einer krummen Fläche, welche die Gerade O′P′ als Durchschnittslinie haben; es sei ABG ein unendlich schmales Band, welches über eines dieser Elemente in willkührlicher Richtung hingebreitet ist. Es ist klar, dass der Theil BG nicht auf das folgende Element zu liegen kommen könne, ohne dass er zugleich zur Umwälzung um Bb oder O′P′ gehöre; und da diese Bewegung frei geschehen soll, so muss dieses Band die Fläche in allen Punkten berühren, und der Winkel P′BG muss constant bleiben; das Band wird alsdann in die Lage BC kommen, so dass der Winkel P′BC gleich ist dem Winkel O′BA. Denn nimmt man das Band BG in BC auf das Element O′P′P″O″ ausgebreitet an, und man bringt dieses zweite Element in die Ebene des ersten, so wird das Band BC sich auf die Verlängerung von AB ausbreiten. Dasselbe gilt von einem Faden. Nun aber geniesst die Linie gg′g″ dieser Eigenschaft; denn da g′ ein Pol des Bogens A′A″ ist, hat man Winkel A′g′O′ = Winkel A″g′O″ = Winkel P′g′g″; und da das so eben Gesagte von der Seitenfläche O′P′, sich auch auf alle andern der Oberfläche anwenden lassen muss, so schliesst man daraus, dass die Curve gg′g″ jene ist, welche auf der Fläche OPP‴O‴ durch eine frei gebogene Gerade mit irgend einer Richtung im ersten Augenblicke gebildet würde. Hat man also die Umwicklungsfläche construirt, die der geometrische Ort der Evoluten einer der Curven mit doppelter Krümmung ist, so erhält man mechanisch eine ihrer Evoluten, wenn man durch einen Punkt dieser Curve einen Faden zieht, der die Fläche berührt, und spannt alsdann diesen Faden frei auf diese Fläche aus.

Eine ebene Curve hat also unendlich viele Evoluten, welche sich alle auf der Oberfläche des Cylinders befinden, dessen Grundfläche jene der Evoluten ist, welche in der Ebene der Curve liegt; alle diese Curven haben eine doppelte Krümmung, ausgenommen jene, welche wir bisher betrachteten, und die als Base der cylinderförmigen Oberfläche dient.

II. *Monge* beweist umgekehrt, dass eine cylinderförmige Fläche mit irgend einer Grundfläche, der geometrische Ort der Evoluten einer unendlichen Menge von Curven sei, wovon jedoch keine von doppelter Krümmung ist.

Jede Curve auf der Oberfläche einer Kugel hat für den Ort ihrer Evoluten die Oberfläche eines Kegels, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel sich befindet und dessen Grundfläche von der Natur der Curve abhängt; denn alle Ebenen, welche zu den Elementen der Curve perpendikulär sind, sind es auch zu der Kugeloberfläche, gehen mithin durch den Mittelpunkt.

Eine Curve also, welche weder eine ebene, noch auf der Oberfläche einer Kugel gezogen ist, hat für den Ort ihrer Evoluten eine Umwicklungsfläche, wovon zwei aufeinander folgende Kanten zwar sich irgendwo begegnen, wovon aber drei sich nicht in demselben Punkte begegnen. Die Reihe dieser Durchschnittspunkte bildet eine Curve, welche man *Wendungskante der evolvirenden Fläche* nennt. Alle Kanten dieser evolvirenden Fläche sind nichts anders, als Tangente dieser Wendungskante.

Sind nun die Gleichungen der Curven mit doppelter Krümmung gegeben, so kann man leicht ihre evolvirende Fläche finden, welche der geometrische Ort ihrer Evoluten ist.

Werden immer durch

$$y = fx, \text{ und } z = \varphi x$$

die Gleichungen der Projectionen der Curve mit doppelter Krümmung, auf die Ebenen der (x, y) und der (x, z) bezeichnet; die Gleichung der Normalebene ist,

$$(s-z)\frac{dz}{dx} + (q-y)\frac{dy}{dx} + p - x = o \ldots (A),$$

wo x, y und z beständige Grössen für eine Normalebene und veränderlich sind, wenn sie von einer Normalebene in die andere übergehen. Wird also diese Gleichung differenziirt, indem man blos x als veränderlich betrachtet, weil y und z Funktionen von x sind, so hat man

für die auf die vorige folgende Ebene, derer Lage willkührlich ist,

$$(s-z)\frac{d^2z}{dx}+(q-y)\frac{d^2y}{dx^2}-\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}=0 \text{ (B).}$$

Um zwischen p, q, r eine Verbindung zu finden, welche für alle Durchschnitte der aufeinander folgenden Normalebenen gilt, muss man x mit Hilfe der beiden vorstehenden Gleichungen eliminiren, und die daraus hervorgehende Gleichung wird die der verlangten Fläche sein, weil sie nichts mehr enthält, als die Coordinaten der Punkte, welche der Reihe der Normalebenen gemein sind.

Hat man ferner die Gleichungen einer Curve mit doppelter Krümmung, so lassen sich auch jene für die Wendungskante der evolvirenden Fläche finden, welche der geometrische Ort ihrer Evoluten ist.

Wir wollen noch eine drittere Normalebene betrachten, welche auf die vorhergehenden folgt; ihre Gleichung lässt sich aus jener der zweiten, oder aus (B) auf dieselbe Art herleiten, wie diese aus (A) abgeleitet wurde. Es ist also:

$$(s-z)\frac{d^3z}{dx^3}+(q-y)\frac{d^3y}{dx^3}-3\left\{\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right\}=0. \text{ (C).}$$

Diese drei Gleichungen geben den Durchschnittspunkt zweier aufeinander folgenden Elemente der evolvirenden Fläche; denn will man die Reihe der Durchschnittspunkte, d. i. die Wendungskante haben, so braucht man nur x aus diesen drei Gleichungen (A), (B), (C), zu eliminiren, und die zwei Gleichungen, welche man zwischen p, q und s erhält, werden die für die Wendungskante sein, und man würde daraus die Gleichungen der zwei Projectionen dieser Kante herleiten.

Nimmt man die Gleichungen (A) und (B), welche die Durchschnittslinie zweier unmittelbar aufeinander folgenden Normalebenen vorstellen, und man leitet aus diesen Gleichungen jene der Projectionen des Elements der evolvirenden Fläche auf den drei rechtwinklichen

Ebenen, indem noch p, q und s eliminirt wird aus (A) und (B), so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$q\frac{d^2y}{dx^2}+s\frac{d^2z}{dx^2}-\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+z\frac{d^2z}{dx^2}+y\frac{d^2y}{dx^2}\right\}=0,$$

$$-p\frac{d^2z}{dx^2}+q\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)-\frac{dz}{dx}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}$$
$$+x\frac{d^2z}{dx^2}-y\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)=0,$$

$$-s\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)-p\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}$$
$$+x\frac{d^2y}{dx^2}-z\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)=0,$$

so dass also der Theil einer zu diesem Elemente Senkrechten zwischen den Punkten x, y und z der Curve mit doppelter Krümmung und der Zusammenkunft mit diesem Elemente, der Krümmungshalbmesser an dem Punkte x, y und z der Curve mit doppelter Krümmung sein wird. Sucht man nun diese kürzeste Entfernung, so findet man:

$$r=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2\right\}}}.$$

Eine Curve mit doppelter Krümmung kann entweder eine ihrer Krümmungen besonders, oder beide zugleich verlieren in demselben Punkte; hieraus folgt, dass eine Curve mit doppelter Krümmung zwei verschiedene Arten Einbiegungspunkte haben kann; ersterer, welcher auch ein *einfacher* genannt werden kann, findet Statt, wenn die Curve in einem ihrer Punkte eben wird; und der zweitere, der ein *doppelter Einbiegungspunkt* heissen mag, wenn die Curve in einem ihrer Punkte in eine grade Linie sich verwandelt.

Da bei einem einfachen Inflexionspunkte die Curve mit doppelter Krümmung in eine ebene übergeht, so

müssen die Gleichungen der Curve für diesen Punkt der allgemeinen Gleichung der Ebene Genüge leisten. Die der Ebene ist:

$$z = ax + by + c;$$

differenziirt man wegen der drei Constanten diese Gleichung dreimal nach einander, so erhält man:

$$dz = adx + bdy,$$
$$d^2z = bd^2y,$$
$$d^3z = bd^3y;$$

indem man bemerkt, dass x die Hauptveränderliche ist. Wird b aus den beiden letztern dieser Gleichungen eliminirt, so hat man:

$$d^2yd^3z - d^2zd^3y = 0;$$

dies ist die Bedingungsgleichung, welcher die Gleichungen der Projectionen der Curve mit doppelter Krümmung Genüge leisten müssen, damit diese Curve einen einfachen Einbiegungspunkt habe.

Im doppelten Einbiegungspunkte ist der Krümmungshalbmesser entweder Null oder unendlich; daher

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2.$$

Da der erste Theil dieser Gleichung die Summe dreier Quadrate ist, muss man haben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ oder } \infty; \frac{d^2z}{dx^2} = 0 \text{ oder } \infty.$$

Indem die dritte Gleichung aus den beiden vorhergehenden abgeleitet ist, so sind die Formeln für einen doppelten Einbiegungspunkt

$$\frac{d^2y}{dx} = 0 \text{ oder } \infty; \frac{d^2z}{dx} = 0 \text{ oder } \infty,$$

oder einfacher

$$d^2y = 0 \text{ oder } \infty; d^2z = 0 \text{ oder } \infty.$$

Vermittelst derselben Formeln erhällt man auch die Wendungspunkte *).

*) Statt der Ausdrücke *Wendungspunkt* der *ersten* und *zweiten Art* bedient sich *Francoeur* (S. *Cours complet* de *Mathe-*

Fünfter Zusatz.

Ist eine doppelt gekrümmte Linie durch ihre Projectionsgleichungen

$$y = F(x) \text{ und } z = F'(x) \ldots . (A)$$

auf die Ebenen der (x, y), und der (x, z) gegeben, so denke man sich von irgend einem Punkte dieser Curve, welchen man als ihren und der Coordinaten Anfangspunkt betrachten kann, indem man hieher den Scheitel des triedrischen Winkels der drei Coordinaten Ebenen verlegt, Theile, gleich Δx abgeschnitten, und verbinde vermittelst Sehnen alle Punkte der Curve, welche den Coordinaten Δx, $F(\Delta x)$, $F'(\Delta x)$, ferner welche den Coordinaten $2\Delta x$, $F(2\Delta x)$, $F'(2\Delta x)$,... entsprechen, bis dass man zu einem Punkt kömmt, dessen Coordinaten $x + \Delta x$, $F(x + \Delta x)$, $F'(x + \Delta x)$ sind, indem man durch x, $F(x)$, $F'(x)$, oder x, y, z, die Coordinaten des Endpunktes des Bogens bezeichnet, welchen man *rectificiren* will. Man erhält durch diese Construction einen Theil des Vielecks, welches in den doppelt gekrümmten Bogen beschrieben ist, und der sich in x, y, z endet; von dem Vielecke finden sich nicht mehr drei aufeinanderfolgende Seiten in einer Ebene (wie schon oben im vorhergehenden Zusatze angezeigt wurde), und dessen Differenz $\Delta\lambda'$ (indem durch λ' die absolute Länge des eingeschriebenen Polygonstückes, das in x, y, z sich endigt, angezeigt wird) wird die Sehne sein, über welcher der Bogen zwischen x, y, z und $x + \Delta x$, $F(x + \Delta x)$, $F'(x + \Delta x)$ oder zwischen $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ eingeschlossen ist. Nun aber ist die Länge einer geraden Linie, im Raume betrachtet, gleich der Summe der Quadrate ihrer Projection auf die drei Coordinatenaxen *), mithin

matiques tom. II. pag. 332. *in der Note*) der Benennung *Ceratoïde* und *Ramphoïde*, von κέρασ, *Horn*; ῥάμφοσ *Vogelschnabel*, und εἶδοσ, *Form*.

*) Man vergl. Application de l'Analyse à la geometrie par *Monge* pag. 34, und meinen folgenden Zusatz, der einen Beweis aus der analytischen Geometrie enthält.

$$\frac{\Delta\lambda'}{dx} = \sqrt{\frac{\Delta y^2}{dx^2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta x^2} + 1} \quad \ldots \text{(B)}.$$

Da aber die Senkrechte, welche von dem Punkte x, y, z auf die Ebene der (x, y) beständig bleibt, und jene von dem Punkte $x + \Delta x$, $y + \Delta x$, $z + \Delta x$ auf die nämliche Ebene herabgelassen sich unaufhörlich der erstern in dem Maase nähert, als Δx abnimmt, und mithin die Anzahl der Seiten des eingeschriebenen Polygons wächst, wodurch die Grösse des Perimeters vom eingeschriebenen Polygonstück sich dem umschriebenen Bogen nähert; so folgt hieraus, dass man immer haben werde $\lambda' = \lambda$, mithin $\Delta\lambda' = \Delta\lambda = 0$, sobald die bewegliche Senkrechte mit der festen, welche zugleich den Bogen λ mit doppelter Krümmung begränzt, zusammenfällt; daher nach der Bezeichnungsart des Differenzial-Calculs:

$$\frac{d\lambda}{dx} = \sqrt{\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2} + 1},$$

oder

$$d\lambda = \sqrt{dy^2 + dz^2 + dx^2}, \quad \ldots \text{(C)},$$

dies ist die allgemeine Formel des Differenzials der Bögen von doppelt gekrümmten Curven, und vermittelst welcher man die Rectification einer ähnlichen Curve erhalten kann, welche die Gleichungen (A) und (B) dieses Zusatzes haben, da man nur eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung mit einer Veränderlichen zu integriren hat; denn aus den Gleichungen (A) und (B) erhält man $dy^2 = F,(x)\,dx^2$ und $dz^2 = F,'(x)\,dx^2$; führt man diese Werthe in die Gleichung (C) ein, so erhält man $d\lambda = dx\sqrt{F,(x) + F,'(x) + 1}$.

Sechster Zusatz.

Es sei MM', Fig. IIII, eine gerade Linie im Raume, derer Länge durch die Entfernung ihrer Endpunkte von den coordinirten Ebenen gesucht werden soll. Es seien $AP = x''$, $PQ = y''$, $QM = z''$, $AP' = x'$, $P'Q' = y'$,

$Q'M' = z'$ die Coordinaten dieser Punkte; man ziehe QQ' aus dem Punkte M, welcher am wenigsten über der Ebene der (x, y) erhaben ist, lasse man eine Senkrechte MN auf die Ordinate $M'Q'$ herab, so hat man in dem bei N rechtwinklichten Dreiecke MNM':

$$\overline{MM'^2} = \overline{M'N^2} + \overline{MN^2}$$

oder

$$\overline{MM'^2} = (z' - z'')^2 + QQ'^2.$$

Ferner in dem bei L rechtwinklichten Dreiecke QLQ'

$$\overline{QQ'^2} = \overline{QL^2} + \overline{Q'L^2}$$

oder

$$\overline{QQ'^2} = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2.$$

Wird dieser Werth in die vorhergehende Gleichung eingeführt, so hat man:

$$\overline{MM'^2} = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z''),$$

folglich

$$MM' = \sqrt{\left\{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2\right\}}.$$

Man kann hier noch bemerken, dass wenn der eine von den Endpunkten mit dem Anfangspunkte zusammen fällt, die Coordinaten dieses Punktes Null werden; die vorige Gleichung geht alsdann in folgende über, wenn der Anfangspunkt A ist,

$$\overline{AM^2} = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

(Vergl. Meier Hirsch geomet. Aufgaben tom. II. pag. 321.)

Siebenter Zusatz.

Methode, den allgemeinen Ausdruck des Krümmungshalbmessers zu finden.

Man ziehe die zwei Ordinaten PM, PM', Fig. V, die sich einander unendlich nahe sind; ferner die Tangenten MT, M'T', und von dem Punkte T lasse man auf M'T' die Senkrechte Th herab. Verlängert man die Senkrechten MC zu MT, und M'C zu M'T', bis sie sich in C begegnen, so wird MC der Krümmungshalbmesser, d. i. der Halbmesser eines Bogens sein, welcher mit der

Curve in dem unendlich kleinen Elemente MM′ zusammenfallen wird. Man muss also MC oder M′C finden.

Man hat $AP = x$, $PM = y$, $MM' = ds$, $CM = \gamma$, $Mm = dx$, $mM' = dy$, $PT = y \cdot \frac{dx}{dy}$, $AT = y \cdot \frac{dx}{dy} - x$,

$TT' = d\,(AT) = d\,(y\frac{dx}{dy} - x)$, MT oder $M'T = y\frac{ds}{dy}$, indem ja die Linien MT und M′T nur um das unendlich Kleine MM′ voneinander verschieden sind. Die Tangenten MT, M′T′, können als parallele Linien angesehen werden, indem der Winkel $T'M'T = MCM'$ unendlich klein ist; aus den wegen $T' = M'Mm$ ähnlichen Dreiecken ThT′ und M′mM hat man:

$$MM'(ds) : M'm\,(dy) = TT'\left(d(y\frac{dx}{dy} - x)\right) : Th =$$

$$= \frac{dy}{ds} \times d\,(y\frac{dx}{dy} - x).$$

Die rechtwinklichen Dreiecke M′hT, CMM′, wo die spitzen Winkel C und hM′T gleich sind, geben

$$Th\left(\frac{dy}{dx}d\left(y\frac{dx}{dy} - x\right)\right) : M'h,\ \text{oder}\ M'T\left(y\frac{ds}{dy}\right)$$
$$= MM'\,(ds) : CM = \gamma;$$

folglich

$$\gamma = \frac{yds^3}{dy^2 d\left(y\frac{dx}{dy} - x\right)};$$

dies ist der allgemeine Ausdruck des Krümmuugshalbmessers. Verrichtet man nun die angezeigte Differenziation, indem man entweder gar kein Differenzial constant, oder eines von den Differenzialen dx, dy, oder ds als constant betrachtet; so hat man:

$1^0 \ldots \gamma = \frac{ds^3}{dyd^2x - dxd^2y}$ wenn kein Differenzial beständig ist.

$2^0 \ldots \gamma = \frac{ds^2}{-dxd^2y}$ indem dx constant, wodurch $d^2x = o$;

$3^0 \ldots \gamma = \frac{ds^3}{dyd^2x}$ dy als constant betrachtet;

$$4^0 \ldots \gamma = -\frac{ds\,dy}{d^2y} \quad \text{oder} \quad \gamma = \frac{ds\,dy}{d^2x}$$

indem ds constant betrachtet ist, desshalb $d^2s = o$, und aus $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $2dxd^2x + 2dyd^2y = o$, mithin

$$d^2y = -\frac{dxd^2x}{dy},$$

und

$$d^2x = -\frac{dyd^2y}{dx}.$$

Der Ausdruck 2^0 kann unter folgende Form gebracht werden, wenn man bemerkt, dass $ds^2 = dx^2 + dy^2$,

$$\gamma = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dxd^2y} = -\frac{dx^3\,(1 + y'^3)^{3/2}}{dxd^2y}$$

$$= -\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''},$$

wo $y' = \frac{dy}{dx}$; $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Wenn BF die Evolute ist von AM, Fig. VI, und man macht $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, $MC = \gamma$, $BQ = t$, $QC = u$, die gegebene Länge $AB = a$, so erkennt man leicht $PN = y\frac{dy}{dx}$, $MN = y\frac{ds}{dx}$, $\gamma = \frac{ds^3}{dyd^2x}$, indem dy constant ist. Aus den ähnlichen Dreiecken MPN, MLC erhält man:

$$MP\,(y) : ML\,(y + t) = PN\left(y\frac{dy}{dx}\right) : LC\,(u - x + a),$$

$$MP\,(y) : ML\,(y + t) = MN\left(y\frac{ds}{dx}\right) : MC\,(\gamma);$$

hieraus erhält man:

$$u - x + a = \frac{(y + t)\,dy}{dx},$$

$$\gamma = \frac{(y + t)\,dy}{dx}.$$

Wird nun die Gleichung der Curve differenziirt, so ergeben sich dy und ds in dx; dx wird verschwinden, und die beiden vorangehenden Gleichungen werden in

x, y, u und t ausgedrückt erscheinen. Wird x und y eliminirt, so ist die Endgleichung in t und u ausgedrückt, und diese ist alsdann die Gleichung der Evolute.

Achter Zusatz.

Vom Krümmungshalbmesser der Curven mit Polarcoordinaten.

Es sei AMS, Fig. VII, die Curve, F der Pol, und FM, Fm zwei einander unendlich nahe Ordinaten; Mr, mt die an die Punkte M und m gezogenen Tangenten, auf welche man vom Pole F die Senkrechten FT und Ft herablässt; Mm′, Tt′ seien kleine Bögen, welche man aus dem Pole F mit den Halbmessern FM, FT beschrieben hat. Setzt man FM $= \mu$, mithin mm′ $= d\mu$; Mm′ $= d\beta$, Mm $=$ ds, CM $= \gamma$, welches den Fahrstrahl bezeichnet.

Wegen des unendlich kleinen Winkels MFm können die Geraden FM, Fm als parallel angesehen werden, da dann die rechtwinklichten Dreiecke Mm′m, MTF ähnlich sind; weil der Winkel FMT nur um den unendlich kleinen Winkel MFm grösser ist, als der Winkel Mmm′; hieraus ergeben sich die Proportionen:

$$\text{Mm}\,(ds) : \text{Mm}'(d\beta) = \text{FM}\,(\mu) : \text{MT} = \mu\,\frac{d\beta}{ds},$$

$$\text{Mm}\,(ds) : \text{mm}'(d\mu) = \text{FM}\,(\mu) : \text{MT} = \mu\,\frac{d\mu}{ds}.$$

Eben so können die Geraden MT, mt als parallel angesehen werden, weil sie einen unendlich kleinen Winkel einschliessen; desgleichen auch die geraden Linien FT und Ft; mithin werden Th und t′t gleiche Linien sein; nun ist aber t′t der unendlich kleine Zuwachs von FT, um von dem Punkte M zu m überzugehen; folglich t′t $=$ Th das Differenzial von FT; man hat also:

$$\text{Th} = d\left(\mu\,\frac{d\beta}{ds}\right).$$

Die ähnlichen Dreiecke mTh, CMm führen zu folgender Proportion:

$$\text{Th}\left(d\left(\mu\frac{d\beta}{ds}\right)\right) : mT \text{ oder } MT\left(\mu\frac{d\mu}{ds}\right)$$
$$= Mm\,(ds) : CM = \gamma;$$

hieraus ergiebt sich

$$\gamma = \frac{\mu d\mu}{d\left(\frac{\mu d\beta}{ds}\right)}.$$

Man kann hier annehmen, dass entweder gar kein Differenzial, oder eine der Grössen $d\mu$, $d\beta$, ds constant sei; man hat alsdann:

1°. $\gamma = \frac{\mu d\mu ds^2}{d\mu d\beta ds + \mu ds d^2\beta - \mu d\beta d^2 s}$ wenn kein Differenzial constant ist;

oder:

$\gamma = \frac{ds^3}{d\beta^3 + d\beta d\mu^2 + \mu d\mu d^2\beta - \mu d\beta d^2\mu}$ indem aus dem Nenner ds, d^2s mit Hilfe der Gleichung $ds^2 = d\mu^2 + d\beta^2$ eliminirt wird;

2°. $\gamma = \frac{\mu ds^2}{d\beta^3 + d\beta d\mu^2 - \mu d\beta d^2\mu}$ $d\beta$ ist constant, mithin $d^2\beta = 0$;

3°. $\gamma = \frac{\mu ds^3}{d\beta^3 + d\beta d\mu^2 + \mu d\mu d^2\beta}$ $d\mu$ ist constant, folglich $d^2\mu = 0$;

4°. $\gamma = \frac{\mu d\mu ds}{d\beta d\mu + \mu d^2\beta}$

oder:

$\gamma = \frac{\mu d\beta ds}{d\beta^2 - \mu d^2\mu}$

da ds constant ist, hat man $d^2s = 0$, oder $d\mu d^2\mu + d\beta d^2\beta = 0$.

Anstatt die Abscissen β auf den Circumferenzen zu nehmen, derer Halbmesser μ immerwährend variiren, ist es weit bequemer, diese Abscissen auf den Circumferenzen eines beständigen Halbmessers zu nehmen. Es sei daher aus dem Pol F mit dem Halbmesser FQ der kleine Bogen Qq beschrieben; man setze $FQ = 1$, $Qq = d\varphi$, alsdann ist $d\beta = \mu d\varphi$ und $d^2\beta = d\mu d\varphi + \mu d^2\varphi$, folglich:

1°. $\gamma = \frac{ds^3}{\mu^2 d\varphi^3 + 2d\varphi d\mu^2 + \mu d\mu d^2\varphi - \mu d\varphi d^2\mu}$,

$$2^0.\ \gamma = \frac{ds^3}{\mu^2 d\varphi^3 + 2d\varphi d\mu^2 - \mu d\varphi d^2\mu}\ \left\{\text{indem } d\varphi \text{ constant ist,}\right.$$

$$3^0.\ \gamma = \frac{ds^3}{\mu^2 d\varphi^3 + 2d\varphi d\mu^2 + \mu d\mu d^2\varphi}\ \left\{d\mu \text{ ist constant,}\right.$$

$$4^0.\ \gamma = \frac{d\varphi ds}{2d\mu d\varphi + \mu d^2\varphi};$$

oder:

$$\gamma = \frac{\mu d\varphi ds}{\mu d\varphi^2 - d^2\mu},$$

indem ds constant, und $ds^2 = d\mu^2 + d\beta^2 = d\mu^2 + \mu^2 d\varphi^2$.

Die Formel 2^0. giebt wenn man substituirt für ds seinen Werth $\sqrt{d\mu^2 + d\beta^2} = \sqrt{d\mu^2 + \mu^2 d\varphi^2} =$

$$= d\varphi \sqrt{\mu^2 + \left(\frac{d\mu}{d\varphi}\right)^2};$$

und nach geschehener Reduction:

$$\gamma = \frac{\left\{\mu^2 + \left(\frac{d\mu}{d\varphi}\right)^2\right\}^{3/2}}{\mu^2 + 2\left(\frac{d\mu}{d\varphi}\right)^2 - \mu\frac{d^2\mu}{d\varphi^2}}.$$

Neunter Zusatz.

Man soll den Ausdruck der krummen Fläche suchen, welche das Volumen V bedeckt; die Fläche selbst mag U heissen.

Der Flächenraum eines ebenen Parallelogramms ELTR, Fig. VIII, auf irgend eine Art im Raume gelegen, ist gleich dem Inhalte seiner Horizontalprojection NXVY, dividirt durch den Cosinus des Neigungswinkels der Ebene ELTR zur Horizontalebene. (Man sehe den folgenden Zusatz). Da nun OH die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen ist, so ist der Winkel VKT der Neigungswinkel der fraglichen beiden Ebenen, wenn man durch V die Senkrechte VK legt, und die Punkte T und K mit einander verbindet. Man hat alsdann Cos. VKT $= \frac{VK}{KT}$; es sei NX $=$ m,

$NY = n$, $XL = a$, $VT = b$, $YR = c$, mithin $NE = a + c - b$; denn da man eine ebene Fläche und die Ordinaten NE, YR, XL, VT wachsend annimmt, so hat man aus der Gleichung der Ebene $EN = z = Ax + By + C$, dass $En + VT = YR + XL$, und hieraus $EN = YR + XL - VT = a + c - b$. Zieht man OQ parallel zu NX, und verlängert TL, VX, bis sie sich in H auf der Linie OH begegnen, so geben die ähnlichen Dreiecke OQH, VKH,

$$OH : OQ \text{ oder } NX = HV : KV = \frac{HV \times NX}{OH};$$

die ähnlichen rechtwinklichen Dreiecke TVH, LXH geben ferner:

$$LX : XH = VT : VH,$$

oder:

$$VT - LX : VT = VH - XH : VH,$$

also

$$VH = \frac{nb}{b - a};$$

in dem Dreiecke QOH hat man:

$$OH = \sqrt{\overline{OQ}^2 + \overline{QH}^2};$$

aus den ähnlichen Dreiecken RYO, ENO erhält man:

$$YR : NE = YO : NO,$$

hieraus

$$YR - NE : YR = YO - NO : OY,$$

folglich

$$OY = \frac{cn}{b - c},$$

man kennt also auch QH, weil $QH = VH - VQ = VH - OY$; da $OQ = m$, kennt man auch OH; nach vorgenommener Substitution ist:

$$VK = \frac{HV \times NX}{OH} = \frac{mnb}{\sqrt{[m^2(b-a)^2 + n^2(b-c)^2]}}$$

hieraus geht hervor:

$$KT = \frac{\sqrt{[m^2(b-a)^2 + n^2(b-c)^2 + m^2n^2]}}{\sqrt{[m^2(b-a)^2 + n^2(b-c)^2]}};$$

also

$$\text{Cos. TKV} = \frac{mn}{\sqrt{[m^2(b-a)^2 + n^2(b-c)^2 + m^2n^2]}},$$

folglich

$$\text{Inhalt ELTR} = \sqrt{[m^2(b-a)^2 + n^2(b-c)^2 + m^2n^2]}.$$

Man nehme nun an, dass eine krumme Fläche durch die vier Punkte E, L, T, R, nnd derer Gleichung $z = f(x, y)$; da z die Ordinate NE ist, und $NX = dx$, $NY = dy$, so hat man $XL = f(x + dx, y)$, $YR = f(x, y + dy)$, $VT = f(x + dx, y + dy)$, so dass die Partialdifferenzialen $\frac{dz}{dx}dx$, $\frac{dz}{dy}dy$, aus derer Summe das Differenzial von dz besteht, nun sein werden $X - NE = \frac{dz}{dx}dx$, und $YR - NE = \frac{dz}{dy}dy$, indem man die Zunahmen dx und dy unendlich klein annimmt, vermöge welcher Hypothese man die Glieder von zwei Dimensionen dieser Zunahmen XL, YR, und VT wegwirft; alsdann wird das Stück ERTL der krummen Fläche merklich eben; da aber $m = dx$, $n = dy$, $b - a = \frac{dz}{dy}dy$, $b - c = \frac{dz}{dx}dx$, folglich:

$$\text{Inhalt ELTR} = \iint dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

(Vergl. Garnier Calcul Different., am Ende die Noten.)

Zehnter Zusatz.

Lehrsatz. Wenn man irgend eine ebene Fläche auf eine andere Ebene vermittelst der von den Scheiteln herabgelassenen Senkrechten projectirt, so ist die Projection dieser Fläche gleich ihrem Inhalte multiplicirt durch den Cosinus des Winkels, den beide Ebenen mit einander bilden.

Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir einen andern vorausschicken, nämlich:

Der Flächenraum der Projection eines Dreiecks ist gleich dem Flächenraume des Triangels, multiplicirt

durch den Cosinus des Winkels, welchen das Dreieck mit seiner Projection bildet.

1) Es sei ABC, Fig. IX, das Dreieck im Raume; hat man die Senkrechte AP auf die Ebene NN herabgelassen, so ist P die Projection des Scheitels A und BPC die Projection des Dreiecks BAC; da aber AM senkrecht auf BC, so ist es auch PM in M auf BC, mithin verhalten sich ihre Flächenräume, wie ihre Höhen AM, PM; so ist:

$$\text{Flächenr. ABC} : \text{Flächenr. PBC} = \text{AM} : \text{PM}$$
$$= \text{r} : \text{Sin. PAM} = \text{r} : \text{Cos. AMP};$$

wird r = 1 gesetzt, so hat man:

$$\text{Flächenr. PBC} = \text{Flächenr. ABC} \times \text{Cos. AMP}.$$

2) Es befinde sich das Vieleck ABCDE, Fig. X, im Raume, die Seite AB in der Horizontalebene; von den Winkelspitzen C, D, E lasse man auf die Horizontalebene, welche durch AB geht, Senkrechten herab, welche diese Ebene in den Punkten C′, D′, E′ durchdringen, und wodurch die Lage des Vielecks ABC′D′E′, als die Horizontalprojection der erstern bestimmt wird.

Das Dreieck ABC′ = b ist die Horizontalprojection des Raumdreiecks ABC = a; man hat also nach dem vorhergehenden:

$$b = a \text{ Cos. } (a, b) \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

durch (a, b) wird der Neigungswinkel der Ebenen a und b bezeichnet.

Die verlängerten Seiten DC, AB begegnen sich in F, und die Seite D′C′, wenn sie verlängert wird, geht auch durch diesen Punkt; es ist daher AD′F die Horizontalprojection des Dreiecks ADF, und AC′F die Horizontalprojection von ACF; man hat also:

$$\text{AD′F} = \text{ADF Cos. } (a, b), \; \text{AC′F} = \text{ACF Cos. } (a, b),$$

daher

$$\text{AD′F} - \text{AC′F} = (\text{ADF} - \text{ACF}) \text{ Cos. } (a, b),$$

d. h.

$$\text{AD′C′} = \text{ADC Cos. } (a, b);$$

wird AD′C′ durch b′, ADC durch a′ bezeichnet, so hat man:

$$b' = a' \text{ Cos. } (a, b) \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Es kann sich ereignen, dass die Punkte D, C gleichviel über der Horizontalebene erhöht sind, in welchem Falle die verlängerte DC niemals der Horizontalebene begegnen könnte; lässt man alsdann von dem gemeinschaftlichen Scheitel A Senkrechten AH′ = h′, AH = h auf die parallelen Seiten C′D′, und CD herab, so sind die Flächenräume der Dreiecke b′, a′, nämlich:

$$b' = \frac{C'D'.h'}{2}, \quad a' = \frac{CD.h}{2},$$

woraus wegen C′D′ = CD folgt, da auch AH′H ein rechter Winkel ist:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{h'}{h} = \text{Cos. } (h', h),$$

(h′, h) ist der Winkel zwischen den Senkrechten h′, h. Da die Linie CD horizontal ist, so ist sie zu AB parallel; ebenso verhält es sich mit C′D′, mithin die Senkrechten h′ und h von A auf C′D′, CD herabgelassen, sind es auch zu AB die eine in der Horizontalebene, die andere in der Raumebene; durch diese Senkrechten wird also der Winkel gemessen, welchen die Ebene des Vielecks im Raume mit der Ebene des projectirten Vielecks bildet, der Fall also, wo das Raumpolygon horizontal ist, macht keine Ausnahme.

Bezeichnet man durch b″, a″ die Flächen AD′E′, ADE, so hat man auch:

$$b'' = a'' \text{ Cos. } (a, b) \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Die Addition der Gleichungen (1), (2) und (3) führt zu folgendem;

$$b + b' + b'' = (a + a' + a'') \text{ Cos. } (a, b).$$

(Man vergl. *Garnier Reciproques de la Géometrie* pag. 186, 187, 188 und 189).

Eilfter Zusctz.

Euler hat zuerst ein allgemeines *Criterium* bekannt gemacht, zu erkennen, ob ein Werth, welcher einer

Differenzialgleichung Genüge leistet, ein besonderer sei, oder nicht, also im Integral nicht enthalten sei. Seit dieser Zeit haben die Herrn *Laplace*, *Lagrange*, *Legendre* und *Poisson* diesem Gegenstand alle Aufmerksamkeit gewidmet. *Poisson* hat bewiesen (Journal de l'ècole polytech. Cahier XIII pag. 71, ff.), dass man immer eine Gleichung der ersten Ordnung von ihrer besondern Auflösung befreien, oder eine nach Gefallen einführen könne. Man vergleiche hiezu noch eine Abhandlung von Hr. *Trembley* (*Memoires de l'academie des Sciences à Turin*, an. 1790 und 1791).

Durch folgende geometrische Aufgaben wird dieser Gegenstand deutlicher werden.

Erste Aufgabe. Man soll eine Curve von der Beschaffenheit finden, dass alle Senkrechten, welche man auf ein System von Tangenten herablässt, unter sich gleich seien.

Die allgemeine Gleichunng der Tangente ist:

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'} (x - x') \ldots\ldots (1)$$

wo x', y' die Coordinaten des Berührungspunktes, x, y die allgemeinen Coordinaten der Tangenten sind. Nimmt man nun den Punkt, von dem die Senktechten ausgehen sollen, als den Anfangspunkt, so hat jede von ihnen zur Gleichung

$$y = -\frac{dx'}{dy'} x \ldots\ldots (2),$$

und ihre Länge, welche wir durch n bezeichnen wollen, wird sein:

$$n = \sqrt{y^2 + x^2} \ldots\ldots (3).$$

Werden in diese Gleichung für x und y ihre Werthe aus den Gleichungen (1) und (2) geschrieben, so wird sie in folgende umgeformt:

$$n = \frac{x'dy' - y'dx'}{\sqrt{dx'^2 + dy'^2}},$$

dass also die Differenzialgleichung der Curve folgende sein wird:

$$y' - x'\frac{dy'}{dx'} = n\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}.$$

Diese Gleichung lässt sich vollkommen mit jener (136) vergleichen, derer besonderes Integral ist, Art. 438,

$$n^2 = x'^2 + y'^2,$$

d. i. die Gleichung eines Kreises, dessen Halbmesser n, dessen Centrum in dem gegebenen Punkte ist. Das vollständige Integral hingegen (137),

$$y' - ax' = n\sqrt{1 + a^2},$$

eine Gleichung, welche einer geraden Linie angehört, derer Lage vermöge der Constante a veränderlich, und der kürzeste Abstand vom Anfangspunkte der Coordinaten immer = n ist. Diese Geraden sind die Oerter der Particulärintegrale, und der Kreis, welcher die besondere Auflösung ist, berührt alle diese Geraden, weil er zum Halbmesser die Senkrechte hat, welche auf diese Geraden herabgelassen wird.

Zweite Aufgabe. Die Curve auffinden, derer Normalen eine gegebene Relation habe mit den Theilen der Axe, welche zwischen dem Anfangspunkt der Abscissen, und den Durchschnittspunkten der Normalen mit der Axe liegen.

Es sei A, Fig. XI, der Anfangspunkt der Coordinaten, MN die Normale, AN = t, MN = n, mithin, da

$$AP = x,\ PN = y\frac{dy}{dx},\ \text{Art. } 70,$$

$$t = x + y\frac{dy}{dx},\ n = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

wird nun die gegebene Beziehung durch

$$n^2 = 2pt$$

ausgedrückt, welches nämlich die Gleichung für die Parabel ist, so gelangt man zu folgender Differenzialgleichung:

$$y^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2p\left[x + y\frac{dy}{dx}\right].$$

Um integriren zu können, löse man die Gleichung für $\frac{dy}{dx}$ auf, und dividire alsdann durch das Radical; hiedurch erhält man:

$$\frac{p - y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{p^2+2px-y^2}} + 1 = o$$

$$= \frac{pdx - ydy}{\sqrt{p^2+2px-y^2}} + dx = o.$$

Das erste Glied dieser Gleichung ist offenbar das Differenzial von $\sqrt{p^2 + 2px - y^2}$, mithin das Integral

$$\sqrt{p^2 + 2px - y^2} + x = c;$$

wird zum Quadrat erhoben, und a statt c + p gesetzt, so hat man:

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - 2pa = o,$$

welche Gleichung einem Zirkel angehört. Aber ausser den Kreisen, durch welche diese Aufgabe aufgelöst wird, hat man auch noch als besondere Auflösung eine Parabel, derer Gleichung

$$y^2 = 2px + p^2;$$

diese Parabel wird durch den beständigen Schnitt aller Kreise erhalten, welche durch das vollständige Integral gegeben sind; diese besondere Auflösung macht den Faktor unendlich, wodurch die vorgelegte Gleichung multiplicirt werden muss, damit man integriren könne.

Zwölfter Zusatz.

Vom Variationscalcul.

1) Wenn eine Funktion

$$Z = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

gegeben ist, wo zwischen x und y eine gewisse Verbindung Statt findet, welche durch

$$y = \varphi x$$

ausgedrückt werden mag; so kann man dem Z verschie-

dene Eigenschaften beilegen, z. B. Z soll ein *Grösstes* oder ein *Kleinstes*, etc. sein. Ist nun $y = \varphi x$ bekannt, so lassen sich nach den Regeln des Differenzialcalculs leicht $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ herleiten, welche Werthe alsdann in den Ausdruck für Z eingeführt diesen in eine Funktion von x verwandeln, und man wird haben:

$$Z = fx.$$

In diesem Falle kann man vermittelst der Regeln, Art. 89, und flgd. die Werthe erkennen, welche x haben muss, damit fx ein *Grösstes* oder ein *Kleinstes* gebe.

So bestimmt man auch, Art. 100. ff., welches die Punkte einer gegebenen Curve seien, für welche die vorgegebene Funktion Z einem *Grössten* oder einem *Kleinsten* entspricht, welche Eigenschaft den übrigen Curvenpunkten nicht zukömmt.

2) Anders verhält es sich, wenn $y = \varphi x$ unbekannt ist, und man für $y = \varphi x$ verschiedene Formen annimmt; woraus erhellet, dass auch $Z = fx$ verschiedene Werthe in x ausgedrückt haben wird. In diesem Falle kann man sich die Aufgabe vorlegen, für fx eine Form aufzufinden, vermittelst derer Z ein *Grösstes* oder ein *Kleinstes* werde, was für jeden andern Werth von x nicht Statt haben kann. Obgleich nun die Verbindung zwischen y und x unbekannt ist, so sind doch die Veränderlichen y und x nicht voneinander unabhängig. Diese letztere Aufgabe gehört dem *Variationscalcul* an *).

« Die Aufgaben vom *Grössten* und *Kleinsten*, sagt *Lagrange* *), waren den alten Geometern nicht unbekannt; denn wir besitzen ein ganzes Buch von Apollo-

*) Man kann den mannigfaltigen Gebrauch des Variationscalculs nichts anders befassen, sagt *Lacroix*, *Traité élémentaire de Calcul differenzial et integral*, pag. 486, ed. 1806, als wenn man Grössen unter einem neuen Gesichtspunkte differenziirt, die schon unter einem andern differenziirt wurden.

**) Calcul des Variations.

nius, in welchem einzig und allein von den grössten geraden Linien gehandelt wird, die von gegebenen Punkten an Bögen der Kegelschnitte gezogen werden können.»

«Apollonius Methode beschränkt sich blos allein darauf, zu beweisen, dass jede andere Gerade aus demselben Punkte an einen Kegelschnitt gezogen, kleiner wäre, im Falle des Maximums, und grösser, im Falle des Minimums, als jene, welche bestimmt wurde. Dieser Methode folgten alle diejenigen, welche nach ihm sich bemüht haben, blos durch den Gebrauch der Geometrie die Aufgaben aufzulösen, welche auf *Maxima* und *Minima* Bezug haben.»

«*Fermat* hat zuerst für diese Art Aufgaben eine direkte und analytische Anflösungsmethode gegeben, welche durch den Differenzialcalcul nach und nach vereinfacht und verallgemeinert wurde, und die darin besteht, dass man das Differenzial, oder den Differenzial-Coëfficienten der Funktion, die ein *Maximum* oder ein *Minimum* sein soll, gleich Null setzt, indem man die Unbekannte als Veränderlich in Hinsicht derjenigen Grösse, für welche die Funktion ein *Grösstes* oder ein *Kleinstes* werden soll, betrachtet.»

«Man kann behaupten, dass wir der Betrachtung der Curve die Hauptmethode der Analysis schuldig sind. Die Bestimmung der grössten und kleinsten Ordinaten bei den Linien und krummen Flächen gab den Aufgaben fürs *Grösste* und *Kleinste* ihre Entstehung, wovon so eben die Rede war; aber bald erhob man sich zu Aufgaben neuer Art und weit schwerer, als die vorhergehenden. Es handelte sich darum, selbst die Curven zu finden, worin Grössen, ganz von dem Raume der gesuchten Curve abhängig, zwischen gegebenen Gränzen *Grösste* und *Kleinste* wurden in Betracht aller möglichen Curven, wie z. B. die Curve, welche den grössten Raum für gegebene Bedingnisse einschliesst, oder welche durch ihre Umdrehung den zwischen gegebenen Gränzen eingeschlossenen Körper erzeugt. Hiezu hat die Mechanik die ersten Probleme dieser neuen Art geliefert. *Neuton*

hat sich zuerst Mühe gegeben, die Curve zu finden, welche bei einer Umdrehung um ihre Axe jenen Körper erzeugt, welcher in einer Flüssigkeit bewegt, den möglichst kleinsten Verlust erleidet. (Pars secund. Princip. phil. nat. pro. XXXV scholion).»

«Eigentlich aber schreibt sich die Entdeckung einer neuen Analysis für diese Art von Untersuchungen von dem berühmten brachystochronischen Problem, d. i. der Linie des möglichst schnellsten Falles her. Man hat sie angewandt auf verwickeltere Aufgaben, wie z. B. auf das der Isoperimeter, wo es sich darum handelt, unter allen Curven von gleichem Perimeter, oder von gleicher Länge jene zu finden, welche zwischen gegebenen Gränzen den grössten oder kleinsten Raum einschliesen, oder wenn sie um ihre Axe sich drehen lässt, die grössten oder kleinsten Flächen, oder die grössten oder kleinsten Körper erzeugen, oder auch eine Curve von der Art zu finden, dass wenn man über ihre Axe eine zweitere Curve construirt, derer Ordinaten irgend Funktionen von den Ordinaten der erstern sind; der Flächenraum der zweitern Curve ein *Maximum* oder *Minimum* sei. Die Schwierigkeiten dieser Aufgaben verbunden mit dem Rufe, welchen ihnen die Bemühungen der *Brüder Bernouilli* *), *Taylor's* **) und *Eulers* ***) erlangten, sind Schuld, dass man überhaupt den Namen Isoperimeter allen Aufgaben beilegte, vermöge welcher man Curven aufsuchen soll, welche *Grösste* oder *Kleinste* sind, ohne oder mit der Bedingung, dass sie von gleicher Länge seien.»

«*Euler's* Werk unter dem Titel: *Mehodus inveniendi lineas Curvas maximi miminique proprietate gaudentes*, würde nichts mehr zu wünschen übrig gelassen

*) *Jacob Bernouilli*, Analysis magni problematis isoperimetri, Bssel 1701; und in Act. erud. Lipsiens. desselben Jahres. *Johann Bernouilli* in den Memoires de l'académie des Sciences 1718.

**) Methodus incrementorum.

***) Coment. academ. Petrop. tom. VI et VIII.

haben hinsichtlich der Curven, welche der Eigenschaft geniessen, grösste oder kleinste zu sein, wenn er nur eine der Differenzialrechnung angemessenere Analyse zum Grunde gelegt hätte.»

«Es bleibt also noch übrig, die Art und Weise aufzufinden, wie man diesen Calcul dieser Art Aufgaben, die eigentlich in sein Gebiet gehören, anpassen könne.» Lagrange hat es übernommen, diese Lücke durch seinen *Variations-Calcul* auszufüllen. Er hat diesen Calcul bekannt gemacht *im zweiten und vierten Bande der Mémoires de l'Académie de Turin*, und *Journal de l'école Polytechnique Cahier XIV. Supplement aux leçons sur le Calcul des Fonctions.*

3) Man schreibe nun in die Funktion $Z = F(x, y, y', y'')$, wo y' und y'', .. für $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ gelten, $y + k$ für y, und $x + i$ für x, wo k und i Funktionen von x bedeuten, k willkührlich, i aber von $y = \varphi x$ abhängig ist; alsdann hat man:

$$Z_{,} = Z + i\frac{dZ}{dx} + k\frac{dZ}{dy} + k'\frac{dZ}{dy'} + k''\frac{dZ}{dy''} + \ldots\ldots$$

Die Natur der Aufgabe erfordert nun, dass $y = \varphi x$ so bestimmt werde, dass für jeden Werth von x immer

$$Z_{,} > Z \text{ oder } Z_{,} < Z.$$

Schliesst man, wie in Art. 173 und 174, so muss sein:

$$i\frac{dZ}{dx} + k\frac{dZ}{dy} + \ldots = 0.$$

Weil k eine willkührliche Grösse ist, was auch x für einen Werth haben mag, und es nicht nothwendig ist, dass sein Werth oder seine Form sich verändere, wenn x variirt oder beständig bleibt; so sind auch $k', k'', \ldots$ willkührlich. Denn für irgend einen Werth von $x = X$, kann man annehmen $k = a + b(x - X) + \frac{1}{2}c(x - X)^2 + \ldots$ $X, a, b, c, \ldots$ sind nach Gefallen angenommen, und da diese Gleichung wie auch ihre Differen-

ziale Statt finden müssen, was auch x bedeuten mag; so müssen sie auch noch bestehen können, wenn $x = X$; daraus ergiebt sich dann $k = a$, $k' = b$, $k'' = c$, .. Der obigen Gleichung kann also wegen der Unabhängigkeit von a, b, c, ... nur in dem Falle Genüge geleistet werden, wenn jedes Glied gleich Null ist *). Daher

$$\frac{dZ}{dx} = 0, \frac{dZ}{dy} = 0, \frac{dZ}{dy'} = 0, \ldots\ldots$$

Es ist möglich, dass alle diese Gleichungen mit einander harmoniren, was auch x für einen Werth haben mag; in diesem Falle findet das *Maximum* oder *Minimum* Statt, und die Verbindung zwischen x und y ist die gesuchte Gleichung $y = \varphi x$, vermöge welcher alsdann Z ein Grösstes oder Kleinstes wird, was für jede andere Verbindung zwischen x und y nicht Platz haben kann. Auch hier wird das Grösste und Kleinste vermittelst der Zeichen unterschieden.

Erhält man aber aus allen diesen Gleichungen zwischen y und x verschiedene Relationen, so ist dies ein Zeichen, dass die Aufgabe unmöglich ist in dem Zustande der Allgemeinheit, welche man ihr gegeben hat. Ereignet sich's aber, dass nur einige dieser Gleichungen unter sich harmoniren, so kann die Funktion Z zwar ein *Maximum* oder ein *Minimum* enthalten, aber nur für einige der Grössen x, y, y' ..; verlangt man nun, dass Z für eine der Grössen x, y, y', ... ein Maximum oder Minimum gebe, so ist die Aufgabe möglich, weil man nur einer einzigen Gleichung bedarf.

4) Aus dem Vorhergehenden folgt nun:

a) dass die Grössen x und y von einander abhängig sind, und man sie nichts desto weniger variiren lassen muss, als wenn sie unabhängig wären, da dies nur ein Mittel ist, um zum Zwecke zu gelangen.

b) Diese Variationen sind nicht unendlich klein, und wenn man sich des Differenzial-Calculs zu ihrer

*) Vergl. Francoeur Cours complet de Mathematiques tom. II. pag. 475, Art. 883.

Bestimmung bedient, so ist dies nur ein Mittel, schneller das zweite Glied der Entwicklung zu erhalten, welches hier allein nothwendig ist.

5) Wir wollen nun diese Theorie durch einige Beispiele erläutern.

Erste Aufgabe. Man soll die Curve auffinden, welche die Eigenschaft besitzt, dass in jedem ihrer Punkte das Produkt

$$Z = [y + (m - x)\, y'] \, [y + (n - x)\, y']$$

ein Maximum oder Minimum sei.

Die Gleichung der Tangente ist nach Art. 71:

$$q = y + (p - x)\, y',$$

wo p die Abscisse, q die Ordinate irgend eines Punktes der Tangente bedeutet. Es sei nun $AP = m$, $AP'' = n$, so hat man:

$$Pm = y + (m - x)\, y', \quad P''m'' = y + (n - x)\, y';$$

das Produkt dieser beiden Gleichungen soll ein *Maximum* oder *Minimum* sein.

Sucht man nach und nach $\frac{dZ}{dx}, \frac{dZ}{dy}, \frac{dZ}{dy'}$, so findet man, dass wenn diese Resultate gleich Null gesetzt werden, diese Gleichungen so lange unzulängig bleiben, als nicht $m = n$; für diesen Fall hat man:

$$Z = \left((y + m)\, y'\right)^2;$$

hieraus leitet man drei Gleichungen ab, welchen zu gleicher Zeit Genüge geleistet wird, wenn man setzt:

$$y + (m - n) \frac{dy}{dx} = o;$$

oder

$$ydx + (m - n)\, dy = o;$$

das Integral dieser Gleichung ist:

$$y = C\,(m - x);$$

dies ist die Gleichung einer graden Linie.

Nimmt man blos $\frac{dZ}{dy'} = o$, so erhält man:

$$\frac{2y'}{y} = \frac{2x - m - n}{2\,(m - x)\,(n - x)} = \frac{1}{(x - m)} + \frac{1}{(x - n)}.$$

Wird integrirt, so erhält man:

$$y^2 = C(x - m)(x - n);$$

woraus erhellet, dass die Curve eine Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem C negativ oder positiv erhalten wird; der Scheitel der Curve wird durch $x = m$ gegeben. Das Produkt Z ist ein *Maximum*, wenn C positiv, und ein *Minimum*, wenn C negativ ist, weil im ersten Falle y'' mit dem zweiten Minus behaftet vorkömmt.

Zweite Aufgabe. Man soll die Curve finden, für welche in jedem ihrer Punkte das Quadrat der Subnormale um die Abscisse vermehrt ein Minimum sei.

Nach Art. 70 ist:

$$Z = (yy' + x)^2;$$

hieraus leitet man die Gleichungen ab, welche mit einander übereinstimmen,

$$yy' + x = 0 = ydy + xdx = 0,$$

derer Integral

$$y^2 + x^2 = r^2;$$

der Kreis, aus dem Anfangspunkte beschrieben, leistet allein der Aufgabe Genüge.

6) Die bisherigen Betrachtungen dienen eigentlich nur dazu, um weit wichtigere Probleme, welche so eigentlich dem Variations-Calcul angehören, auflösen zu können. Nun aber handelt sich's darum, Eigenschaften des *Grössten* und *Kleinsten* aufzufinden zwischen gegebenen Gränzen, derer aber nicht mehr die Funktion Z, sondern vielmehr ihr Integral, welches durch $\int Z$ bezeichnet werden mag, geniesset. Da nun die Funktion Z als keinen ursprünglichen Werth habend betrachtet wird, so muss man, damit sie einen solchen habe, annehmen:

$$y = \varphi x,$$

und lässt man die Funktion nun sehr wenig variiren, so muss der Werth von $\int Z$, welcher zwischen Gränzen, den gegebenen Werthen von x entsprechend, genommen wird, abnehmen für ein *Maximum*, und zunehmen für ein *Minimum*.

Bezeichnet nun Z eine Funktion von x, y und

der Differenzial-Coëfficienten, so muss das Integral $\int Z$ unendlich viele Werthe, bei den nämlichen Werthen von x, annehmen, welche alle von der Relation $y = \varphi x$ abhängen, so dass man fragen kann, welche aus allen Relationen zwischen y und x bewirkt, dass das Integral von $\int Z$ den grössten oder kleinsten Werth zwischen gegebenen Gränzen habe.

Wenn sich ein Körper bewegt, dessen Form gegeben ist, so lassen sich entweder die verschiedenen Punkte in einer seiner Lagen unter sich vergleichen, oder die unendlich kleinen Räume, die jeder Punkt durchlaufen kann, wenn man annimmt, dass die Lage des Körpers sich unendlich wenig verändert. Für den ersten, in welchem der Körper in Ruhe betrachtet wird, hat man die Charakteristik d beibehalten, welche sich auf die Veränderung der Coordinaten seiner Oberfläche bezieht. Im zweiten Falle, wo Variationen von den ersten ganz unabhängig ausgedrückt werden sollen, bedient man sich der Bezeichnung δ *).

Wird eine bewegliche oder unbewegliche Curve, aber immer in einer ihrer Lagen betrachtet, so bezeichnen dx, dy, ... eine Vergleichung zwischen ihren Coordinaten. Um aber die verschiedenen Orte anzuzeigen, welche einer und derselbe Punkt einer Curve, welche hinsichtlich ihrer Form nach einem gewissen Gesetze veränderlich ist, haben kann, wollen wir δx, δy, . . . schreiben, welche Ausdrücke die unter diesem Gesichtspunkte betrachteten Zunahmen andeuten, und Funktionen von x und y sind. Eben so wächst dx, wenn es übergeht in $d(x + \delta x)$ und $d\delta x$; d^2x und $d^2\delta x$; u. s. w.

Man muss also, wenn die beiden Charaktere d und δ vereinigt vorkommen, $d\delta x$ und δdx nicht als von einander verschieden ansehen, obgleich sie einzeln genommen, ganz von einander unabhängig sind. Eben so bedeuten $\delta\int$ und $\int\delta$ eines und dasselbe.

*) Man lese hierüber nach: *Analytische Mechanik* von *Lagrange*, übersetzt von *Murhard*, besonders pag. 52 ff.

7) Um zu beweisen, dass $d.\delta y = \delta.dy$, und $\delta\int Z = \int\delta Z$ einerlei sei, nehme man die Funktion $y = \varphi x$ als die ursprüngliche Relation zwischen y und x an; $y + \delta y = \varphi' x$ sei die variirte; alsdann hat man:

$$\delta y = \varphi' x - \varphi x = \psi x \text{ *)}.$$

Setzt man der Kürze wegen $y + \delta y = y'$, so hat man:

$$\delta y' = \pi y';$$

hieraus folgt:

$$\delta y' - \delta y = \pi y' - \pi y = d(\pi y) = d.\delta y.$$

Da aber $dy = y' - y$, mithin, wenn nach δ differenziirt wird:

$$\delta dy = \delta y' - \delta y,$$

folglich:

$$\delta.dy = d.\delta y.$$

Wird $y = mdy$ gesetzt, so hat man nach vorigem Satze:

$$\delta.md^2y = d.\delta mdy = d^2\delta y;$$

auf diesem Wege gelangt man zu einem allgemeinen Schlusse:

$$\delta.d^n y = d^n\delta y,$$

d. i. *man kann die Charakteristik δ nach jener d setzen, ohne in der Hauptsache etwas zu ändern.*

*) Um dem φ, und φ' einen gemeinschaftlichen Ursprung zu geben, betrachtete Euler den ursprünglichen Werth von y, oder φx als von einer andern Funktion abgeleitet, welche nebst der Veränderlichen x auch noch die Veränderliche t enthielt und sich für $t = o$ in φx verwandelte. (Nov. Comment. Acad. Petrop. tom. XVI. pag. 35). Hierdurch geht $y + \delta y$ über in $y + \frac{dy}{dt}dt$, und $\frac{dy}{dt}$, welches unter der Hypothese $t = o$ genommen wird, stellt eine willkührliche Funktion von x vor, wenn man die Zusammensetzung von y in t nicht als besondern Fall ansieht. Der allgemeine Werth von y würde durch folgende Reihe gegeben sein:

$$y + \frac{dy}{dt}.\frac{t}{1} + \frac{d^2y}{dt^2}.\frac{t^2}{1.2} + \ldots$$

Nimmt man die Veränderliche t in y gleich Null an, und die Differenzial-Coëfficienten in Hinsicht x, so erhält man die Grössen, welche man substituiren muss, um den veränderten Zustand des Integrals $\int V\,dx$ nach den Potenzen von t geordnet zu erhalten. *Lacroix, traité elementaire de Calcul Diff.* et *integ.* pag. 487, Note.

Wird $\int Z$ durch $Z_{,}$ vorgestellt, so hat man:

$$dZ_{,} = Z, \text{ und } \delta dZ_{,} = \delta Z,$$

oder

$$\text{D.}\ \delta Z_{,} = dZ$$

und

$$\delta Z_{,} = \int \delta Z;$$

für $Z_{,}$ seinen Werth wiederum eingeführt, hat man:

$$\delta \int Z = \int \delta Z.$$

8) Wenn es der Raum und Zweck dieses Werkchens erlaubte, so könnte ich die folgenden Untersuchungen in Abtheilungen bringen, nämlich Variationsrechnung mit zwei, drei und mehrerern Veränderlichen; allein diese einzelnen Fälle lassen sich alle unter einen Allgemeinen bringen, von dem sie eigentlich nur Ableitungen sind.

Es sei daher:

$$Z = F(x, x_{,}, x_{,,}, \ldots, y, y_{,}, y_{,,}, \ldots, z, z_{,}, z_{,,}, \ldots),$$

wo dx, d^2x, ... dy, d^2y, ... durch $x_{,}$, $x_{,,}$, ... y, $y_{,}$, ... ausgedrückt sind, iudem kein Differenzial als beständig betrachtet wird.

Wenn x, y, z die willkührlichen und endlichen Zunahmen δx, δy, δz, ... erhalten, so geht dx in $d(x + \delta x)$, dy in $d(y + \delta y)$, dz in $d(z + \delta z)$ über, so dass wenn $Z_{,}$ nach dem Taylorschen Lehrsatze entwickelt und nachher integrirt wird, man habe:

$$\int Z_{,} = \int Z + \int\Big(\frac{dZ}{dx}dx + \frac{dZ}{dy}dy + \frac{dZ}{dz}dz + \frac{dZ}{dx_{,}}\delta x_{,} + \frac{dZ}{dy_{,}}\delta y_{,} + \frac{dZ}{dz_{,}}dz_{,} + \frac{dZ}{dx_{,,}}\delta x_{,,} + \frac{dZ}{dy_{,,}}\delta y_{,,} + \frac{dZ}{dz_{,,}}\delta z_{,,} + \ldots\Big) + \int \ldots$$

Die Bedingung für ein *Maximum* oder *Minimum* ist, dass das Integral der Glieder der ersten Ordnung zwischen gegebenen Gränzen Null sei, was auch immer δx, δy und δz bedeuten mögen. Nimmt man das Differenzial der bekannten Funktion z, indem x, $x_{,}$, $x_{,,}$, ... y,

$y_{,}$, $y_{,,}$, ... als eben so viele unabhängige Veränderlichen betrachtet werden; so wird man haben:

$$dZ = mdx + ndx_{,} + pdx_{,,} + \ldots$$
$$+ Mdy + Ndy_{,} + Pdy_{,,} + \ldots$$
$$+ \mu dz + \nu dz_{,} + \pi dz_{,,} + \ldots$$

wo m, n, . . . M, N, . . . μ, ν, . . . die Coëfficienten partieller Differenziale von Z hinsichtlich x, $x_{,}$, ... y, $y_{,}$, ... z, $z_{,}$, ... sind, diese Funktionen sind mithin bekannt für jeden gegebenen Werth von Z. Verrichtet man dieselbe Differenziation durch das Zeichen δ, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \delta Z = m.\,\delta x + n.\,\delta dx + p\delta d^2x + \ldots. \\ \quad + M.\,\delta y + N.\delta dy + P\delta d^2y + \ldots. \\ \quad + \mu.\,\delta z + \nu.\,\delta dy + \pi\delta d^2z + \ldots. \end{array}\right\} \ldots (1).$$

Diese Grösse, derer Gliederanzahl begränzt ist, ist in der That nichts anders, als jene, welche unter dem Zeichen $\int$ sich befindet. Die Bedingungen also, ob ein Maximum oder Minimum Platz habe, ist $\int\delta Z = o$ zwischen angegebenen Gränzen, was auch immer die Variationen δx, δy und δz sein mögen. Da nun $d.\,\delta x$ mit $\delta.\,dx$ gleichbedeutend ist, so giebt die erste Linie der Gleichung (1),

$$m.\,\delta x + n.\,d\delta x + p.\,d^2\delta x + q.\,d^3\delta x + \ldots.$$

wo m, n. . . . Differenziale enthalten, so dass hier die Heterogenität der Glieder nur scheinbar ist. Wird theilweise integrirt, so erhalten wir folgende Reihe:

$$\int m.\,\delta x = \int m.\,\delta x,$$
$$\int n.\,d\delta x = n.\,\delta x - \int dn.\,\delta x,$$
$$\int p.\,d^2\delta x = p.\,d\delta x - dp.\,\delta x + \int d^2p.\,\delta x,$$
$$\int q.\,d^3\delta x = q.\,d^2\delta x - dq.\,d\delta x + d^2q\delta x - \int d^3q\,\delta x,$$

. .

Bringt man alle diese Theile in eine Summe, so dass immer die hintersten Theile zusammengezogen ein Glied der Summe ausmachen, so ist:

$$\int (m - dn + d^2p - d^3q + \ldots)\,\delta x$$
$$+ (n - dp + d^2q - \ldots\ldots\ldots)\,\delta x$$
$$+ (p - dq + \ldots\ldots\ldots\ldots)\,d\delta x$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

diese Summe ist das Integral der Gleichung (1), oder von $\int . dZ = o$; folglich:

$$\int[(m - dn + d^2p - \ldots)\delta x + (M - dN + d^2P - \ldots)\delta y + (\mu - d\nu + \ldots)\delta z] = o \ldots (2),$$

$$\begin{aligned}(n - dp + d^2q - \ldots)\delta x &+ (N - dP + d^2Q - \ldots)\delta y \\ &+ (\nu - d\pi + \ldots)\delta z \\ + (p - dp + d^2r - \ldots) d\delta x &+ (P - dQ + \ldots) d\delta y \\ &+ (\pi - \delta\chi + \ldots) d\delta z \\ + (q - dr + \ldots) d^2\delta x &+ \ldots + K = o \ldots\ldots\ldots (3),\end{aligned}$$

worin K eine willkührliche Constante bedeutet. $\int\delta Z$ kann nicht Null werden, wenn nicht jedes Glied unter dem Zeichen $\int$ einzeln genommen Null ist. Findet, vermöge der Aufgabe, keine Relation zwischen δx, δy und δz Statt, so muss die Gleichung (2) sich in drei Theile zerlegen lassen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} m - dn + d^2p - d^3q + d^4r - \ldots &= o \\ M - dN + d^2P - d^3Q + d^4R - \ldots &= o \\ \mu - d\nu + d^2\pi - d^3\chi + d^4\varrho - \ldots &= o \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (4).$$

Um also die Verbindungen zwischen x, y und z zu entdecken, wodurch $\int Z$ ein *Maximum* oder *Minimum* wird, muss man das Differenzial der gegebenen Funktion Z nehmen, indem man x, y, z, dx, dy, dz, ... als eben so viele unabhängigen Veränderlichen betrachtet, und sich der Charakteristick δ zur Bezeichnung des Zuwachses bedient; dieses Geschäft heisst man die *Variation nehmen.* Die erhaltenen Resultate vergleiche man mit der Gleichung (1) und leite daraus die Werthe für m, M, μ, n, N, ... in x, y, z und ihren Differenzialen ab, welche durch d angezeigt werden, substituire diese Werthe hierauf in die Gleichungen (3) und (4). Die erste bezieht sich auf die Gränzen, zwischen welchen das *Maximum* sein soll; die Gleichung (4) enthält die gesuchten Relationen. Sind die Aufgaben aus der Geometrie genommen, so sind diese Gleichungen jene der Curve oder Fläche, welche der verlangten Eigenschaft Genüge leistet.

9) Wenn die Integration verrichtet ist, und sie zwischen bezeichneten Gränzen genommen werden soll, so

beziehen sich die übrigbleibenden Glieder, welche die Gleichung (3) ausmachen, auf diese Gränzen, sie hat nun die Form $K + L = o$, erhalten, wo L eine Funktion von x, y, z, δx, δy, δz, ... ist. Man bemerke mit einem und mit zwei Accenten die Zahlenwerthe dieser Veränderlichen bei der ersten und zweiten Gränze. Da das Integral zwischen diesen Gränzen genommen werden soll, so muss man die verschiedenen Glieder von L, woraus die Gleichung (3) besteht, erst mit einem, dann mit zwei Accenten bemerken, das erstere Resultat vom zweitern abzählen, und gleich Null setzen, so dass die Gleichung $L_{,,} - L_{,} = o$ keine Veränderliche mehr enthalten kann, weil x, δx, ... die Werthe $x_{,}$, $\delta x_{,}$, $x_{,,}$, $\delta x_{,,}$, ... welche durch die Gränzen der Integration angezeigt sind, angenommen haben werden. Man muss nicht vergessen, dass diese Accente sich nur auf die Gränzen des Integrals, keineswegs auf die abgeleiteten Gleichungen sich beziehen.

Es bieten sich nun vier Fälle dar.

1°. *Wenn die Gränzen gegeben und bestimmt sind.* d. h. wenn die letzten Werthe von x, y, z constant sind; da $\delta x_{,}$, $d\delta x_{,}$, ... $\delta x_{,,}$, $d\delta x_{,,}$, ... Null sind, so sind auch alle Glieder von $L_{,}$ und $L_{,,}$ gleich Null, und der Gleichung (3) ist an und für sich Genüge geleistet. Alsdann bestimmt man die Constanten, welche durch die Integration in die Gleichungen (4) gekommen sind, durch die für die Gränzen angenommenen Bedingungen. Dieser Fall kömmt in der Geometrie auf jenen zurück, wo man eine Curve sucht, welche ausserdem, dass sie ein verlangtes *Maximum* oder *Minimum* enthalten, auch noch durch zwei gegebene Punkte gehen soll. Die Gleichungen (4) sind jene der gesuchten Curve; man bestimme die Constanten darin vermittelst der Bedingung, dass diese Curve durch die zwei Punkte gehe, um die es sich gerade handelt. (Vergl. La croix in dem schon angef. Werke pag. 500, u. ff.)

2°. *Wenn die Gränzen willkkührlich und unabhängig sind;* alsdann ist jeder von den Coëfficienten der Gleichung (3) einzeln genommen Null.

3°. *Wenn es für die Gränzen Bedingungsgleichungen giebt*, d. h. wenn die Natur der Aufgabe einige der Grössen $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$, durch Gleichungen miteinander in Verbindung setzt, bediene man sich der Differenziale dieser Gleichungen, um einige der Veränderlichen $dx_{,}$, $dy_{,}$, $dz_{,}$, $dx_{,,}$, ... als Funktionen der andern zu erhalten. Substituirt man in $L_{,,} - L_{,} = o$, so finden sich diese Variationen auf die möglichst kleinste Anzahl zurück gebracht, da diese letztern durchaus voneinander unabhärgig sind, und die Gleichung zerfällt in mehrere andern, indem man ihre Coëfficienten gleich Null setzt. Dies bezeichnet in der Geometrie, dass die Curve an zwei Punkten, die nicht bestimmt sind, begränzt werden soll, diese Punkte liegen aber auf zwei Curven oder zwei gegebenen Flächen.

Hierbei kann man noch ein anderes Verfahren einschlagen. Es sei $u = o$, $v = o$, die gegebenen Bedingungsgleichungen. Man multiplicire ihre Variationen δu, δv, ... durch unbestimmte Grössen λ, λ'; dies erzeugt $\lambda \delta u + \lambda' \delta v + ...$ eine bekannte Funktion von δx, $\delta x_{,,}$, δy, ... Zählt man diese Summe zu $L_{,,} - L_{,} = o$, so erhält man:

$$L_{,,} - L_{,} + \lambda \delta u + \lambda' \delta v + ... = o \;.... (5).$$

Man behandle alle Variationen $\delta x_{,}$, $\delta x_{,,}$, ... als unabhängig, setze ihre Coëfficienten gleich Null, und eliminire vermittelst dies r Gleichungen die unbestimmten λ, λ' ... Durch diesen Calcul gelangt man zu demselben Resultate. Man muss aber nicht aus $u = o$, $v = o$, ... schliessen, dass man an den Gränzen $du = o$, $dv = o$, ... habe; diese Bedingungen sind unabhängig, und können nicht wohl zugleich existiren. Fände dies jedoch Statt, so müsste man $du = o$, $dv = o$, ... als neue Bedingungen betrachten, und ausser $\lambda \delta u$ auch $\lambda' \delta du$ darunter verstehen. So z. B. wenn

eine Curve gesucht werden soll, welche an ihrer Gränze einen Berührungspunkt einer gewissen Ordnung mit der Curve oder Fläche der Gleichung $u = o$ habe.

4°. Ist die eine der Gränzen bestimmt, die andere aber gewissen Bedingungen unterworfen, oder auch willkührlich, so ist dieser Fall in den drei vorhergehenden enthalten. Hier muss eines der Ende der gesuchten Curve durch einen bestimmten Punkt gehen, während das andere irgend einen Punkt entweder auf einer gegebenen Curve oder Fläche hat.

11) Es könnte sich auch ereignen, dass nach der Natur der Aufgabe die Variationen δx, δy, δz gewissen Bedingungen unterworfen wären, welche durch $\varepsilon = o$, $\vartheta = o$ und zwar unabhängig von den Gränzen gegeben sind, wenn z. B. die gesuchte Curve auf einer krummen Fläche gezogen wäre. Alsdann lässt sich die Gleichung (2) nicht mehr in drei andere zerlegen, und die Gleichung (4) findet gar nicht mehr Statt; da müsste man dann erst die Variationen wie oben, auf die möglichst kleine Anzahl in der Formel (2) mit Hilfe von Bedingungsgleichungen reduciren, und die Coëfficienten der übrig gebliebenen Variationen gleich Null setzen; oder was auf dasselbe hinausläuft, der Gleichung (2) noch die Glieder $\lambda\delta\varepsilon + \lambda'\delta\vartheta + \ldots$ zuzählen, diese Gleichung in andere zerlegen, indem man δx, δy, δz als unabhängig betrachtet, und letztlich die Unbestimmten λ, λ', ... eliminirt.

12) *Erste Aufgabe. Man soll die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Punkten oder zweischen zwei gegebenen Curven finden.*

Hier lassen sich zwei Fälle unterscheiden; entweder wird diese kürzeste Linie im Raume betrachtet, oder nicht. Es heisse immer s die verlangte Linie, alsdann hat man für den letztern Fall, Art. 159.

$$Z = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

und

$$\int Z = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Nimmt man die Variation der erstern Gleichung, so hat man:

$$\delta Z = \frac{dx \,.\, \delta dx + dy \,.\, \delta dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit jener (1), so ergiebt sich:

$$m = o,\ M = o,\ \mu = o,$$

$$n = \frac{dx}{ds},\ N = \frac{dy}{ds},$$

die übrigen Coëfficienten sind gleich Null: für die Gleichung (4) ist

$$dn = d\left(\frac{dx}{ds}\right) = o;\ dN = d\left(\frac{dy}{ds}\right) = o,$$

hieraus folgt

$$dx = ads, \text{ und } dy = bds;$$

werden diese Gleichungen durch einander dividirt, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a},$$

wird integrirt, so ist:

$$y = \frac{b}{a} x + c,$$

wo $\frac{b}{a}$ und c zwei beliebige Constanten sind. Die vorige Gleichung gehört der Geraden Linie an.

Sollte man diese kürzeste Linie im Raume bestimmen, so wäre $\int Z = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$,

$$\delta Z = \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \cdot \delta dy + \frac{dz}{ds} \cdot \delta dz,$$

$$m = o,\ M = o,\ \mu = o,\ n = \frac{dx}{ds},\ N = \frac{dy}{ds},\ \nu = \frac{dz}{ds};$$

die übrigen Coëfficienten verschwinden. Die Gleichung (4) giebt hier

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right) = o, \; d\left(\frac{dy}{ds}\right) = o, \; d\left(\frac{dz}{ds}\right) = o,$$

hieraus folgt

$$dx = ads, \; dy = bds, \; dz = cds;$$

wird zum Quadrat erhoben, und addirt, so ist:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

welche Bedingung Statt finden muss, damit diese Gleichungen vereinbarlich seien. Durch Division findet man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}, \; \frac{dz}{dx} = \frac{c}{a},$$

durch Integration

$$bx = ay + a', \; cx = az + b';$$

die Projectionen der gesuchten Linie sind mithin gerade Linien, folglich diese Linie selbst eine gerade *).

Will man ihre Lage kennen, so hat man die fünf Constanten a, b, c, a', b' zu bestimmen. Soll man z. B. die kürzeste Entfernung zweier festgesetzten Punkte A $(x_,, y_,, z_,)$ und C $(x_{,,}, y_{,,}, z_{,,})$ finden, so hat man $\delta x_,$, $\delta x_{,,}$, ... $\delta y_,$... gleich Null, und alsdann findet die Gleichung (3) ihre Anwendung. Nimmt man an, dass den beiden vorigen Gleichungen Genüge geleistet werden soll, wenn darin $x_,$, $x_{,,}$, $y_,$, ... für x, y, z, gesetzt wird; so erhält man vier Gleichungen, vermittelst welcher nebst $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ die fünf Constanten sich bestimmen lassen. Soll die zweite Gränze ein fixer Punkt in der Ebene der (x, y), und die erste eine Curve AB, Fig. XII, in der nämlichen Ebene sein, so reicht die Gleichung $bx = ay + a'$ hin. Es sei $y_, = fx_,$ die Gleichung der Curve AB; hieraus leitet

*) Denn durch die gerade Linie im Raume kann man zu einer Horizontalebene (Ebene der Projection) eine Ebene legen, welche auf jener senkrecht aufsteht; der Durchschnitt dieser beiden Ebenen ist eine gerade Linie, welche die Projection derjenigen im Raume genannt wird.

man ab $\delta y_{,} = A\delta x_{,}$; die Gleichung (3) wird $L = \frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y$; und da die zweite Gränze C festgesetzt ist, so braucht man nur die Gleichungen $\delta y_{,} = A\delta x_{,}$ und $dx_{,}.\delta x_{,} + dy_{,}.\delta y_{,} = o$ miteinander zu vereinigen. Eliminirt man $\delta y_{,}$, so ist $dx_{,} + Ady_{,} = o$.

Man hätte auch die Bedingungsgleichung $\delta y_{,} - A\delta x_{,} = o$ durch die unbestimmte λ vervielfachen, und zu $L_{,}$ zählen können; hiedurch wäre entstanden:

$$\frac{dx_{,}}{ds_{,}}.\delta x_{,} + \frac{dy_{,}}{ds_{,}}\delta y_{,} + \lambda\delta y_{,} - \lambda A\delta x_{,} = o,$$

und hieraus

$$\frac{dx_{,}}{ds_{,}} - \lambda A = o, \quad \frac{dy_{,}}{ds_{,}} + \lambda = o;$$

wird λ eliminirt, so erhält man ebenfalls

$$dx_{,} + Ady_{,} = o.$$

Da aber der Punkt A $(x_{,}, y_{,})$ auf der geraden Linie AC liegt, so ist auch

$$bdx_{,} = ady_{,},$$

folglich

$$a = -bA,$$

und

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{A} = \frac{b}{a};$$

woraus erhellet, dass die Gerade AC eine Normale zur gegebenen Curve ist. Die Constante a' lässt sich durch die Betrachtung der zweiten Gränze bestimmen.

Es ist nicht schwer, die vorigen Schlüsse auch auf drei Dimensionen anzuwenden. Man kann also überhaupt schliessen, dass die kürzeste Entfernung AC zwischen zwei Curven AB, CD, Fig. XIII, die Gerade sei, welche zugleich ihre Normale ist.

Wird verlangt, dass die kürzeste Linie auf einer krummen Fläche, derer Gleichung $u = o$, gezogen werde; so lässt die Gleichung (2) sich nicht mehr in drei andere zerlegen, wenn man nicht das Glied $\lambda\delta u$ zuzählte.

In diesem Falle könnte man δx, δy und δz als unabhängig betrachten, und man fände folgende Relationen:

$$d\frac{dx}{ds} + \lambda \frac{du}{dx} = o, \ d\frac{dy}{ds} + \lambda \frac{du}{dy} = o, \ d\frac{dz}{ds} + \lambda \frac{du}{dz} = o.$$

Wird λ eliminirt, so hat man die beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{du}{dz}\right) d\left(\frac{dx}{ds}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right) d\left(\frac{dz}{ds}\right);$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) d\left(\frac{dz}{ds}\right) = \left(\frac{du}{dz}\right) d\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

welche die Gleichungen der Curve sind.

Man nehme z. B. die kleinste Entfernung A′C′ auf einer Kugel, welche ihr Centrum im Anfangspunkte hat; desshalb

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = o,$$

$$\frac{du}{dx} = 2x, \ \frac{du}{dy} = 2y, \ \frac{du}{dz} = 2z.$$

Unsere Gleichungen werden, wenn ds constant betrachtet ist,

$$zd^2x = xd^2z, \ zd^2y = yd^2z;$$

hieraus

$$yd^2x = xd^2y.$$

Wird integrirt, so ist:

$$zdx - xdz = ads, \ zdy - ydz = bds, \ ydx - xdy = cds.$$

Wird die erstere dieser Gleichungen durch $-y$, die zweitere durch x, die drittere durch z vervielfacht, und dann zusammen gezählt, so findet man:

$$ay = bx + cz,$$

welches die Gleichung der Ebene ist, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Die gesuchte Curve ist also der grösste Kreis A′C′, Fig. XIII, welcher durch die beiden Punkte A′ und C′ geht, oder welcher normal zu den beiden Curven A′B und C′D ist, welche als Gränzen dienen, und auf der Kugeloberfläche gegeben sind.

13) Wenn ein Körper sich bewegt in einer Flüssigkeit, so erleidet er einen Widerstand, welcher, bei übrigens gleichen Umständen, von seiner Form abhängt.

Ist dieser Körper durch Umdrehung entstanden und bewegter sich in der Richtung seiner Axe, so ist nach mechanischen Grundsätzen der möglichst kleinste Widerstand, wenn die Gleichung der erzeugenden Curve folgende Bedingungen erfüllt:

$$\int \frac{ydy^3}{dx^2 + dy^2} = \textit{minim.}, \text{ oder } Z = \frac{yy'^3dx}{1 + y'^2}.$$

Man bestimme nun diese erzeugende Curve des Körpers mit geringstem Widerstande. Nimmt man die Variation, so findet man:

$$m = o, \; n = \frac{-2ydy^3dx}{(dx^2 + dy^2)^2} = \frac{-2yy'^3}{(1 + y'^2)^2},$$

$$p = o, \; M = \frac{dy^3}{dx^2 + dy^2} = \frac{y'^3dx}{1 + y'^2},$$

$$N = \frac{yy'^2(3 + y'^2)}{(1 + y'^2)^2}, \ldots\ldots$$

Die zweite Gleichung (4) ist $M - dN = o$; und es folgt aus dem an Z verrichteten Calcul, dass

$$d\left(\frac{y'^3y}{1 + y'^2}\right) = M.\frac{dy}{dx} + Ndy' = y'dN + Ndy',$$

wegen $M = dN$. Integrirt man, so ist:

$$a + \frac{y'^3y}{1 + y'^2} = Ny' = \frac{yy'^3(3 + y'^2)}{(1 + y'^2)},$$

also $a(1 + y'^2)^2 = 2yy'^3$. Wir bemerken, dass die erste der Gleichungen (4) $m - dn = o$ auf der Stelle das nämliche Resultat $-n = a$ geliefert hätte, so dass diese beiden Gleichungen zu demselben Ziele führen.

Man hat

$$y = \frac{a(1 + y'^2)^2}{2y'^3}, \; x = \int \frac{dy}{y'} = \frac{y}{y'} + \int \frac{ydy'}{y'^2};$$

führt man für y seinen Werth ein, so ist es leicht, dieses Integral zu bestimmen. Es bleibt hernach noch übrig, y' aus den Gleichungen für x und y zu eliminiren, und man erhält die Gleichung der verlangten Curve, welche zwei Constanten enthält, die man nach den gegebenen Bedingnissen bestimmen muss.

14) *Zweite Aufgabe. Welches ist die Curve ABM, Fig. XIV, worin der Flächenraum BODM von dem Bogen ABM, den Krümmungshalbmessern BO, MD und dem Bogen OD der Evolute ein Minimum ist.*

Das Element des Bogens AM ist

$$ds = dx \sqrt{1 + y'^2};$$

der Krümmungshalbmesser

$$MD = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''},$$

das Produkt dieser Gleichungen ist das Element des verlangten Flächenraums,

$$Z = \frac{(1 + y'^2)^2 . dx}{y''} = \frac{(dx^2 + dy^2)}{dx . d^2y},$$

man soll nun die Gleichung $y = fx$ suchen, welche $\int Z$ zu einem Minimum macht. Man nehme die Variation δZ, und beschränke sich blos auf die zweite der Gleichungen (4), die für diesen Fall hinreicht, so findet man:

$$M = o, \; N - dP = 4a,$$

$$N = \frac{dx^2 + dy^2}{dx . d^2y} 4dy = \frac{1 + y'^2}{y''} 4y',$$

$$P = - \frac{(1 + y'^2)^2}{y''^2 . dx}.$$

Nun aber

$$d\left(\frac{(1 + y'^2)^2}{y''}\right) = Ndy' + Pdy''dx$$

$$= 4ady' + dP . dy' + Pdy'' . dx,$$

indem man $4a + dP$ für N schreibt. Indess ist auch $y''dx = dy'$, wodurch die letztern Glieder verwandelt werden in

$$(y''dP + Pdy'')\,dx = d\,(Py'') . dx = - d\left(\frac{(1 + y'^2)^2}{y''}\right);$$

mithin wenn integrirt wird,

$$\frac{(1 + y'^2)^2}{2y''} = ay' + b,$$

$$y'' = \frac{(1 + y'^2)^2}{2\,(ay' + b)} = \frac{dy'}{dx};\; dx = \frac{2\,(ay' + b)\,dy'}{(1 + y'^2)^2},$$

letztlich

$$x = c + \frac{by' - a}{1 + y'^2} + b\,\text{Bog.}\,(\text{Tang.} = y');$$

ferner

$$y = y'x - cy' - \int \frac{by' - a}{1 + y'^2} dy' - \int b dy' \,\text{Bog.}\,(\text{Tang.} = y'),$$

das letzte Glied lässt sich theilweise integriren, und man erhält:

$$y = y'x - cy' - (by' - a)\,\text{Bog.}\,(\text{Tang.} = y') + f;$$

wird Bog. (Tang. $= y'$) vermittelst der Werthe von x und y eliminirt,

$$by = a(x - c) + \frac{(by' - a)^2}{1 + y'^2} + bf,$$

$$\sqrt{(by - ax + g)} = \frac{(by' - a)\,dx}{ds},$$

$$ds = \frac{bdy - adx}{\sqrt{(by - ax + g)}},$$

und endlich

$$s = 2\sqrt{(by - ax + g)} + h;$$

diese Gleichung, verglichen mit der Gleichung (77), Art. 363, gehört für die Cycloide, wo die vier Constanten nach einer gleich grossen Anzahl gegebener Bedingungen bestimmt werden müssen.

15) *Dritte Aufgabe. Die Funktion* $Z = \frac{ds}{\sqrt{(z - h)}}$ *sei ein Curvenbogen*, oder $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, *man soll* $\int Z$ *zu einem Minimum machen.*

Diese Aufgabe ist nichts anders, als man soll die Curve AC′, Fig. XII, finden, nach welcher ein schwerer Körper fallen soll, um die wenigste Zeit von C′ bis A zu gebrauchen.

Bildet man die Variationen, so ist

$$\mu = \frac{-ds}{2\sqrt{(z - h)^3}},\quad n = \frac{dx}{ds\sqrt{(z - h)}},$$

$$N = \frac{dy}{ds\sqrt{(z - h)}},\quad \nu = \frac{dz}{ds\sqrt{(z - h)}};$$

ferner

$$m = M = p \ldots = o;$$

die Gleichungen (4) werden

$$d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{(z-h)}}\right) = o,\ d\left(\frac{dy}{ds\sqrt{(z-h)}}\right) = o \quad \ldots\ldots\ (6).$$

Integrirt und dividirt man diese beiden Resultate durcheinander, so erhält man:

$$dy = adx;$$

hieraus erhellet, dass die Projection der Curve auf die Ebene der (x, y) eine Gerade, und folglich diese Curve in der zur (x, y) senkrechten Ebene beschrieben ist. Betrachtet man diese Ebene als jene der (x, z), so ist die erste der Gleichungen (1) hinreichend, und man hat $kdx = ds\sqrt{(z-h)}$; und da $ds^2 = dx^2 + dz^2$, so findet man:

$$dx = \frac{dz.\sqrt{(z-h)}}{\sqrt{(k^2+h-z)}}.$$

Setzt man $z = k^2 + h - u$, so erkennt man gleich, dass diese Gleichung der Cycloide angehört, wo k^2 der Durchmesser des erzeugenden Kreises ist.

Sind die Gränzen zwei festgesetzte Punkte A und C′, Fig. XII, so ist weiter keine andere Bedingung zu erfüllen, als die Cycloide AC′ durch diese beiden Punkte gehen zu lassen; hiedurch bestimmt man die Werthe der Constanten k und h.

Wenn die zweite Gränze ein festgesetzter Punkt C′ ist, und die erste eine Curve AB, welche mit dem Punkte in der Verticalebene der (x, z) liegt; hat man

$$\delta x_{\prime\prime} = dz_{\prime\prime} = o,$$

und

$$L_{\prime} = \frac{dx_{\prime}}{ds_{\prime}\sqrt{(z_{\prime}-h)}}.\delta x_{\prime}$$
$$+ \frac{dz_{\prime}}{ds_{\prime}\sqrt{(z_{\prime}-h)}}.dz_{\prime}.$$

Man darf hier nur $L_{\prime}$ gleich Null machen, indem man auf die erste Gränze achtet, welche durch eine Curve AB dargestellt ist, derer Gleichung $x_{\prime} = fz_{\prime}$ ge-

geben ist. Man leitet daraus ab, $\delta x_{\prime} - A dz_{\prime} = o$; vervielfacht man durch λ, zählt zu $L_{\prime}$, so findet sich:

$$\frac{dx_{\prime}}{ds_{\prime}\sqrt{(z_{\prime}-h)}} + \lambda = o; \quad \frac{dz_{\prime}}{ds_{\prime}\sqrt{(z_{\prime}-h)}} - A\lambda = o.$$

Wird λ eliminirt, so erhält man:

$$dz_{\prime} + A dx_{\prime} = o;$$

die Cycloide muss also die gegebene Curve AB unter einem rechten Winkel schneiden; die Constante k lässt sich bestimmen, indem man die Gleichung der Cycloide mit der vorhergehenden vergleicht.

Man würde bei drei Dimensionen die nämliche Folge finden, so dass also die Curve des schnellsten Falles von irgend einer Curve CD, Fig, XIII, zu einer andern AB eine Cycloide A′C′ als Normale zu diesen beiden letztern ist. Dasselbe fände Statt, wenn die beiden Gränzen auf zwei krummen Flächen wären, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Soll die Curve auf einer gegebenen Fläche, derer Gleichung $u = o$, gezogen werden; so lässt sich die Gleichung (2) nicht eher in drei zerlegen, als bis man $\lambda \delta u$ zugezählt hat; wird hieraus λ eliminirt, so gelangt man zu den Gleichungen der gesuchten Curven. Hätte man zu Gränzen zwei gegebene Punkte, so würde man die Constanten unter der Bedingung bestimmen, dass die Curve durch diese beiden Punkte gehe. Wären hingegen die Gränzen zwei Curven, so muss die gesuchte Curve diese beiden unter einem rechten Winkel schneiden *).

16) *Vierte Aufgabe. Welches ist die Curve BM, Fig. XV, derer Länge s gegeben ist, die durch B und M geht, und mit ihren Gränzordinaten BC, PM und der Axe Ax den kleinsten Raum einschliesst.*

Wenn der Bogen s constant ist, so muss $\int y dx$ ein Maximum sein, man muss daher die Variation von $\int Z = \int y dx$ mit jener von $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} - \text{Const.} = o$

*) Vergl. vol. IV des Mémoires de Turin, et les mémoires de l'académie des Sciences pour les années 1767 et 1786.

vereinigen, um die Gleichung (2) in zwei andere zerlegen zu können. Man findet als complete Variation:

$$\int\left(y.\delta dx + dx.\delta y + \frac{\lambda dx.\delta dx + \lambda dy.\delta dy}{ds}\right) = o,$$

hieraus

$$m = o, \; n = y + \lambda\frac{dx}{ds}, \; M = dx, \; N = \lambda\frac{dy}{ds},$$

und

$$y + \lambda\frac{dx}{ds} = c, \; x - \lambda\frac{dy}{ds} = c'.$$

Diese Gleichungen sind identisch, indem man durch Integration zu demselben Resultate gelangt; man braucht daher λ nicht zu eliminiren.

Die erstere giebt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{[\lambda^2 - (y-c)^2]}}{y-c}.$$

folglich

$$(x - c')^2 + (y - c)^2 = \lambda^2.$$

Die gesuchte Curve ist also ein Cirkel; je nachdem er seine erhabene oder hohle Seite der Axe der x zukehrt, ist der Flächenraum ein *Minimum* oder *Maximum*. Man muss hiebei die Constanten c, c′ und λ so bestimmen, dass der Kreis durch die Punkte B und M gehe, und der Bogen BM die verlangte Länge habe. Diese ist die einfachste der Aufgaben über Isoperimeter.

17) Herr *Ampère*, ehemaliger Professor an der polytechnischen Schule zu Paris, hat in einem Mémoire: « *Recherches sur l'application des formules générales du Calcul des Variations aux problèmes de la Mécanique,* » die Verschiedenheiten untersucht, welche Statt finden, wenn man blos geometrische Aufgaben durch die Variationsmethode auflöst, und wenn man sie auf mechanische Aufgaben anwendet. Man bemerkt bald, sagt dieser Geometer, dass man bei mechanischen Aufgaben die unbestimmten Coëffinienten, durch welche man die Bedingungsgleichungen vervielfacht, als Veränderliche betrachten muss; bei geometrisehen Aufgaben hingegen, werden

sie gewöhnlich als constant angesehen. Wirklich muss der Punkt des Körpers, dessen Coordinaten x, y, z sind, vor der unendlich unmerklichen Veränderung seiner Lage, noch derselbe sein, dessen Coordinaten nach dieser Veränderung $x + \delta x$, $y + \delta y$, und $z + \delta z$ sind, welche Bedingung bei rein geometrischen Aufgaben nicht Platz findet, da zwischen den Punkten einer Curve, oder einer Fläche in den beiden nacheinander angenommenen Lagen keine nothwendige Entsprechung existirt. Die Variationen δx, δy, δz sind bestimmt, sobald in der Mechanik die neue Lage des Systems festgesetzt ist; und da die allgemeine Gleichung des Gleichgewichts in jeder Lage Statt haben muss, so ist man genötbigt, die Variationen δx, δy, δz gänzlich unbestimmt zu lassen, und also ihre Coëfficienten gleich Null zu setzen. Hiedurch gelangt man zu soviel Gleichungen, als Coordinaten vorhanden sind. Da es aber in jeder Aufgabe eine bestimmte Anzahl dieser Veränderlichen giebt, welche unabhängig sein müssen, die also nicht gebraucht werden können, diesen Gleichungen Genüge zu leisten; so bieten die unbestimmten Faktoren hiezu ein treffliches Mittel dar. In der Geometrie hingegen kann man $\delta x = o$, oder $\delta x = o$ und $\delta y = o$ setzen, je nachdem es sich um eine Linie oder Fläche handelt, wodurch man aber die Punkte sich willkührlich einander entsprechen lässt: dies hindert nicht, dass der allgemeinen Gleichung des *Maximums* oder *Minimums*, welche für besondere Bedingungen modificirt ist, vollkommen Genüge geleistet sei. Die Anzahl der Gleichungen, welche man erhält, wenn man die Coëfficienten der andern Variationen gleich Null setzt, ist gleich der Anzahl der abhängigen Veränderlichen; und da man nur so vieler Gleichungen bedarf, als Veränderlichen vorhanden sind, so muss man die unbestimmten Coëfficienten, durch welche man die Bedingungsgleichungen multiplicirt hat, als constant ansehen.

18) *Fünfte Aufgabe. Was ist BM*, Fig. XV, *für eine Curve, für welche der Flächenraum BCPM gegeben ist, wenn BM der möglichst kürzeste Bogen ist?*

Man hat hier $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = Minimum$ unter der Bedingung $\int y dx$ — const. = o. Wird wie oben geschlossen, so ergiebt sich:

$$\frac{dx}{ds} + \lambda y = c,\ \lambda' x - \frac{dy}{ds} = c';$$

der Kreis ist also wiederum die verlangte Curve.

19) *Sechste Aufgabe. Man soll die Curve MB,* Fig. XIV, *suchen, welche die kürzeste unter allen ist, wenn der Flächenraum zwischen zwei Fahrstrahlen DM und DB gegeben angenommen wird?*

Man muss haben $s = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = Minimum$ unter der Bedingung $\int \frac{1}{2}(xdy - ydx) = const.$ Hieraus erhält man:

$$\frac{dx . \delta dx + dy . \delta dy}{ds} + \frac{1}{2} \lambda (dy . \delta x + x . \delta y$$
$$- dx . \delta y - y \delta\, dx) = o,$$

$$\frac{1}{2} \lambda dy - d\left(\frac{dx}{ds} - \frac{1}{2} \lambda y\right) = o,$$

$$\frac{1}{2} \lambda dx + d\left(\frac{dy}{ds} + \frac{1}{2} \lambda x\right) = o.$$

Diese Gleichungen stimmen sichtbarlich miteinander überein, man braucht also nur eine zu integriren, da λ eine beliebige Constante ist. Hieraus ergiebt sich:

$$\lambda y + c = \frac{dx}{ds}, \text{ oder } (\lambda y + c)\, dy = dx \sqrt{[1 - (\lambda y + c)^2]}.$$

Man mache $\lambda y + c = z$, und integrire; man erhält $(\lambda x + b)^2 + (\lambda y + c)^2 = 1$, oder auch $(x + b)^2 + (y + c)^2 = k^2$. Die gesuchte Curve ist mithin ein Kreis, von dem verlangt wird, dass er durch die Punkte M und B gehe, und den gegebenen Flächenraum MDB bilde, so dass also jede andere Curve, welche durch die zwei Punkte M und B des Umkreises geht, und denselben Flächenraum bildet, den Bogen, welcher zwischen dem Winkel MDB liegt, länger hätte, als der Kreisbogen. *Unter allen Curven von gleicher Länge, und zwischen zwei gegebenen Punkten jene zu finden,*

derer Flächenraum MDB ein Maximum ist, ist mithin eine Aufgabe, die gerade das Umgekehrte der vorhergehenden enthält.

19) *Siebente Aufgabe. Unter allen ebenen Curven durch zwei Ordinaten BC und PM*, Fig. XVI, *begränzt, und welche bei ihrer Umdrehung Körper von gleichem Inhalte beschreiben, jene zu finden, welche das grösste Volumen erzeugt.*

Man hat

$$\int \pi y^2 dx = \text{Maximum},$$

und

$$\int 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \text{Const.}$$

Hieraus leitet man leicht ab:

$$\frac{2\lambda y dx}{ds} + y^2 = c, \; ydx + \lambda ds = d \left(\frac{\lambda y dy}{ds}\right).$$

Diese Gleichungen stimmen miteinander überein, und die erstere giebt:

$$dx = \frac{(c - y^2)\, dy}{\sqrt{[4\lambda^2 y^2 - (c - y^2)^2]}} \ldots, \; (7).$$

Ist die Constante $c = o$, so ist:

$$dx = \frac{-ydy}{\sqrt{(4\lambda^2 - y^2)}},$$

hieraus

$$(x - b)^2 + y^2 = 4\lambda^2;$$

dies ist die Gleichung eines Kreises, dessen Centrum in irgend einem Orte der Axe der x ist, und der durch zwei gegebene Punkte gehen soll. Dieser Kreis entspricht nur dann der Bedingung der Aufgabe, wenn der durch Umdrehung des Bogens CM erzeugte Inhalt, der Forderung Genüge leistet. Wirklich enthält die Integralgleichung nur zwei Constanten, welche sich durch die Bedingung, dass die Linie durch die Punkte B und M gehe, bestimmen lassen. Die allgemeine Auflösung dieser Aufgabe ist durch die Gleichung (7) gegeben.

20) *Aufgabe. Unter allen ebenen Curven von gleicher Länge und zwischen zwei gegebenen Punkten jene zu finden, welche bei ihrer Umdrehung ein grösstes Volumen oder den grössten Inhalt erzeugt.*

In beiden Fällen ist $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \text{Const.}$ In dem einen muss $\int \pi y^2 dx$ und in dem andern $\int 2\pi y ds$ ein *Maximum* sein. Im ersten Falle $Z = \pi y^2 dx$. Ordnet man die Schlüsse, wie vorhin, so findet man:

$$\pi\lambda y^2 + \frac{\lambda dx}{ds} = c;$$

hieraus folgt

$$dx = \frac{(c - \pi y^2)\, dy}{\sqrt{[\lambda^2 - (c - \pi y^2)^2]}}.$$

Die zu suchende Curve geniesset mithin die Eigenschaft, dass ihr Krümmungshalbmesser $\gamma = \frac{\lambda}{2\pi y}$. Man hat wirklich

$$y' = \sqrt{\left[\left(\frac{\lambda}{c - \pi y^2}\right)^2 - 1\right]},$$

$$y'' = \frac{2\lambda^2 \pi y}{(c - \pi y^2)^3},$$

$$s' = \frac{\lambda}{c - \pi y^2}.$$

Man nennt jene Curve, derer Krümmungshalbmesser im umgekehrten Verhältnisse der Ordinate ist, die *elastische Linie.*

Zu näherer Betrachtung der elastischen Linie lese man nach: *Eitelwein Statik der festen Körper* tom. III. pag. 130 — 186.

Ausser c und λ hat man noch eine drittere Constante; die Bedingungen, dass die Curve durch zwei gegebene Punkte gehe, und dass sie die verlangte Länge habe, dienen zur Bestimmung dieser drei Grössen.

Im zweiten Falle

$$Z = \int 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)};$$

hieraus folgt

$$\frac{2\pi y dx + \lambda dx}{ds} = c,$$

$$dx = \frac{c dy}{\sqrt{[(2\pi y + \lambda)^2 - c^2]}}.$$

Die verlangte Curve ist die *Kettenlinie*, derer Axe horizontal ist. Es findet hier ein *Maximum* oder ein *Minimum* Statt, je nachdem sie ihre hohle oder convexe Seite der Axe der x zukehrt.

Die Kettenlinie ist jene Curve, welche gebildet wird durch eine unausdehnbare gleich dicke und schwere an beiden Enden aufgehängte Schnur. Vergl. *Eitelwein* im genannten Bande pag. 95 ff.

21) *Achte Aufgabe. Man soll die Curve von gegebener Länge s und zwischen zwei festgesetzten Punkten finden, dass ∫yds ein Maximum werde.*

Man findet leicht

$$(y + \lambda) \frac{dx}{ds} = c;$$

hieraus

$$dx = \frac{cdy}{\sqrt{[(y+\lambda)^2 - c^2]}}.$$

Man erhält die vorige Curve. Da $\frac{\int yds}{s}$ die verticale Ordinate des Schwerpunktes eines Curvenbogens, dessen Länge s ist; so sieht man leicht ein, dass der Schwerpunkt irgend eines Bogens der Kettenlinie tiefer liegt, als der Schwerpunkt einer jeden andern Curve, die durch dieselben Punkte begränzt ist.

Man schliesse für $\int y^2dx =$ *Minimum*, und $\int ydx$ $=$ Const., wie oben, und man findet $y^2 + \lambda y = c$, oder vielmehr $y = c$, oder eine Gerade zur Axe der x parallel. Da $\frac{\int y^2dx}{2\int ydx}$ die verticale Ordinate des Schwerpunktes jeder ebenen Fläche ist, so liegt der Schwerpunkt eines verticalen Rechtecks, dessen eine Seite horizontal ist, am aller tiefsten. Jede Masse Wasser, dessen obere Fläche horizontal ist, hat ihren Schwerpunkt am tiefsten liegen *).

*) Man vergl. *Euler*, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes.

Ende der Zusätze.

Verzeichniss der Druckfehler, deren Verbesserung die Entfernung des Druckorts vom Uebersetzer unmöglich machte.

Seite	12	Zeile	5	und 7 lies x^{2p}.
—	12	—	14	*differenziiren* statt *diverenziiren.*
—	13	—	9	setze x nach dem Worte für.
—	15	—	10	*um* statt *und.*
—	25	—	13	und 15 *Differenzialen* statt *Differenzialien.*
—	27	—	9	*Beweise* statt *Bemesse.*
—	29	—	5	v. u. lies: *so findet man sein Differenzial.*
—	33	—	2	lies: *so erhält man.*
—	33	—	21	*Theile* statt *Theilen.*
—	34	—	4	y' für y.
—	39	—	12	v. u. lies: *dies ist das zweite Differenzial der Gleichung* (30).
—	41	—	6	*hieraus* statt *so.*
—	42	—	9	v. u. setze ein Comma nach also.
—	42	—	6	v. u. *seien* statt *sei.*
—	45	—	7	v. u. lies: *in den für PT.*
—	60	—	15	ist *an* nach Gliede ausgelassen.
—	62	—	5	*und* statt *oder.*
—	66			ist vor Art. 100 *Aufgabe I.* ausgelassen.
—	68	—	8	v. u. $\overline{AC}^3$ statt AC^{-3}.
—	75	—	7	lies: *werden diese Werthe.*
—	80	—	1	v. u. fehlt ein Comma nach kehrt.
—	81	—	3	v. u. *leite* statt *leitet.*
—	84	—	12	ist *uns* überflüssig.
—	95	—	11	*Tangenten* statt *Tangente.*
—	95	—	13	*enthält* statt *erhält.*
—	95	—	20	*der* statt *den.*
—	96	—	18	*anstatt* für *Statt.*
—	103	—	15	muss ein Comma nach liess stehen.
—	106	—	9	fehlt das Punktum, und
		—	10	lies: *Es* statt *es.*
—	131	—	3	ein *Doppelpunkt* nach ist.
—	135	—	9	lies: *rechtwinklichten.*
—	137	—	9	*Reihe* statt *Reihen.*
—	145	—	13	lies: *Normale* $= y\sqrt{\frac{2ay - y^2}{y^2} + 1}$.
—	152	—	1	v. u. $t = \sqrt{x^2 + y^2}$.
—	161	—	4	v. u. nach dem Comma lies: *so ist.*
—	161	—	5	v. u. Kreisbogen dx statt x.
—	168	—	17	*kleinen* statt *Kleinen.*
—	176	—	14	*enthielte* statt *erthilete.*

Seite 183 Zeile 10 v. u. *abge* statt *ahge*.

— 189 — 17 lies: $\mathrm{La} = \frac{\mathrm{Log.}\ a}{\mathrm{Log.}\ 10}$.

— 218 — 8 *erhält* statt *enthält*.

— 225 — 3 *beiden* statt *beide*.

— 228 in der Anmerkung lies: *woraus man die Faktoren von* $x^2 - bx - a$ *erhält, wenn dieser Ausdruck gleich Null gesetzt wird.*

— 236 — 11 ist p im ersten Theile der Gleichung als Exponent zu betrachten.

— 238 — 11 *übergehen* statt *übergeht*.

— 256 — 8 $\frac{ds}{dx\ fx}$ statt $\frac{ds}{dx\ f}$.

— 270 Art. 371 *Benützen* statt *Benutzen*.

— 302 — 4 lies: *muss* statt *wird*.

— 314 — 6 v. u. fehlt der Divisor N im ersten Gliede der zweiten Gleichung.

— 316 — 1 v. u. *deren* statt *dessen*.

— 332 — 5 v. u. *nur* statt *nicht*.

— 356 — 8 v. u. *geschnitten* statt *geschritten*.

— 368 — 4 ist $(2\sqrt{-1})^m$ der Nenner.

— 378 — 7 nach dem Comma lies: *so ist*.

— 386 — 9 lies: 993 statt 99^3.

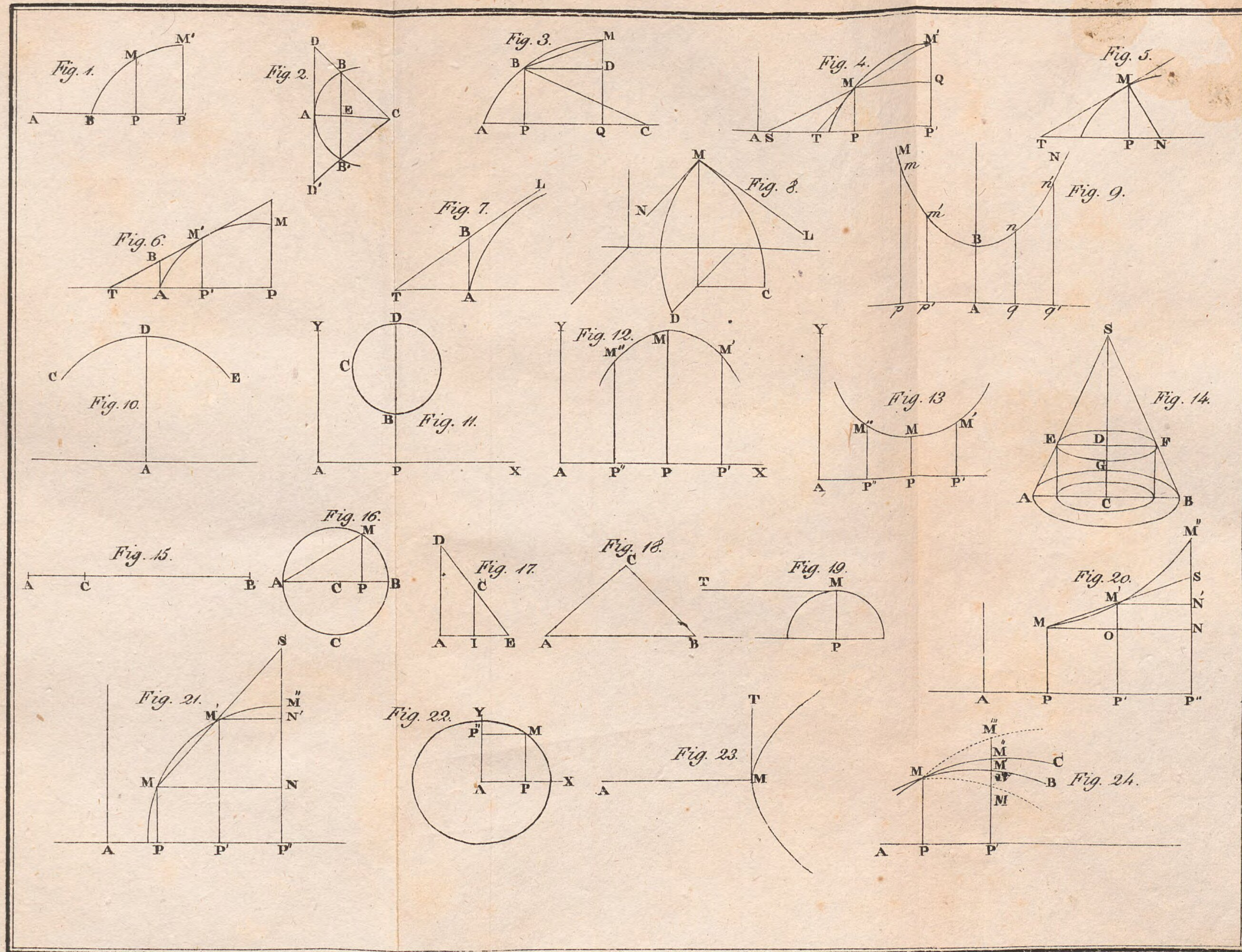
— 387 — 4 im Anfange *Zähler* statt *Nenner*.

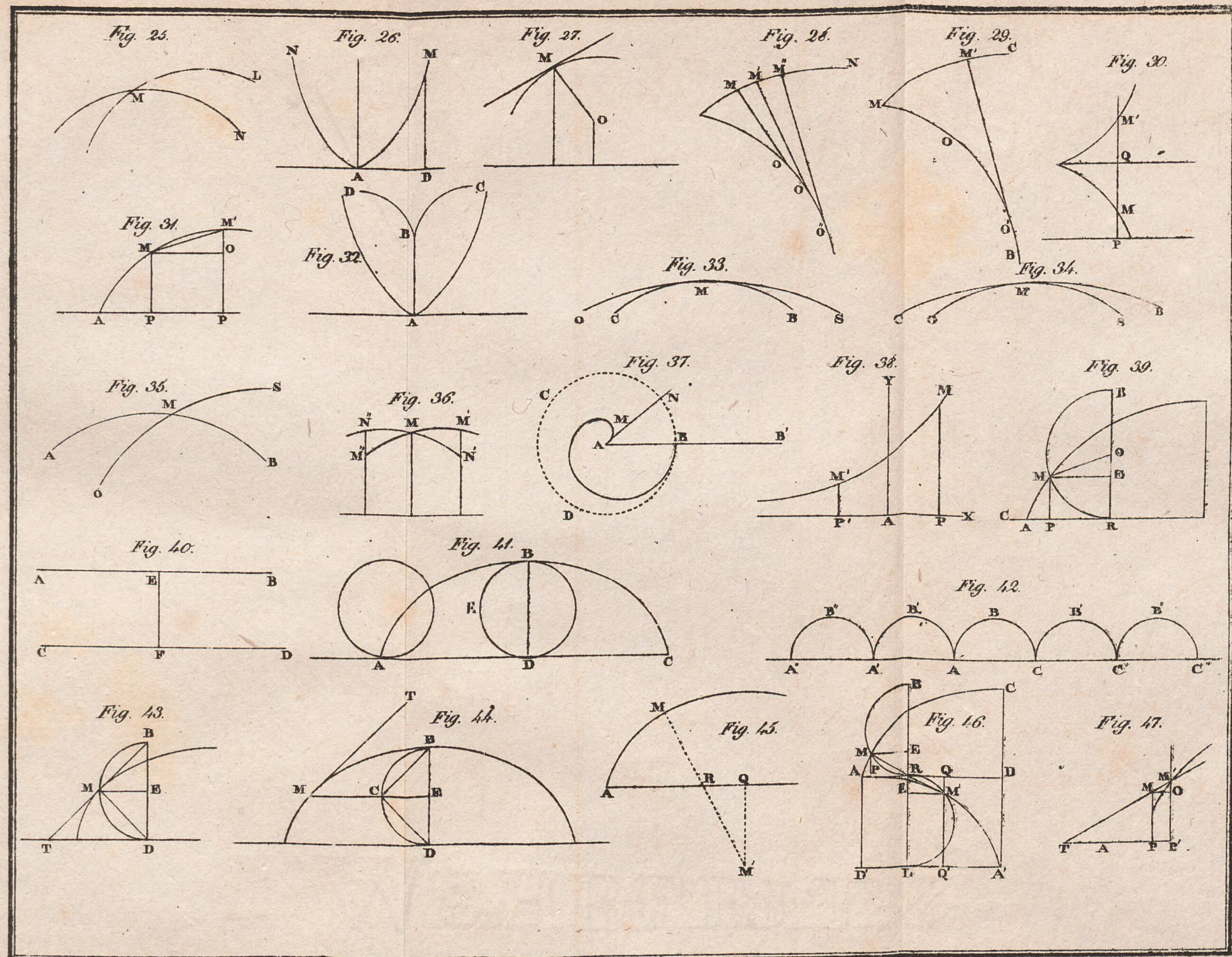
— 389 — 18 $(x - 2)^2$ statt $(x - 1)^2$.

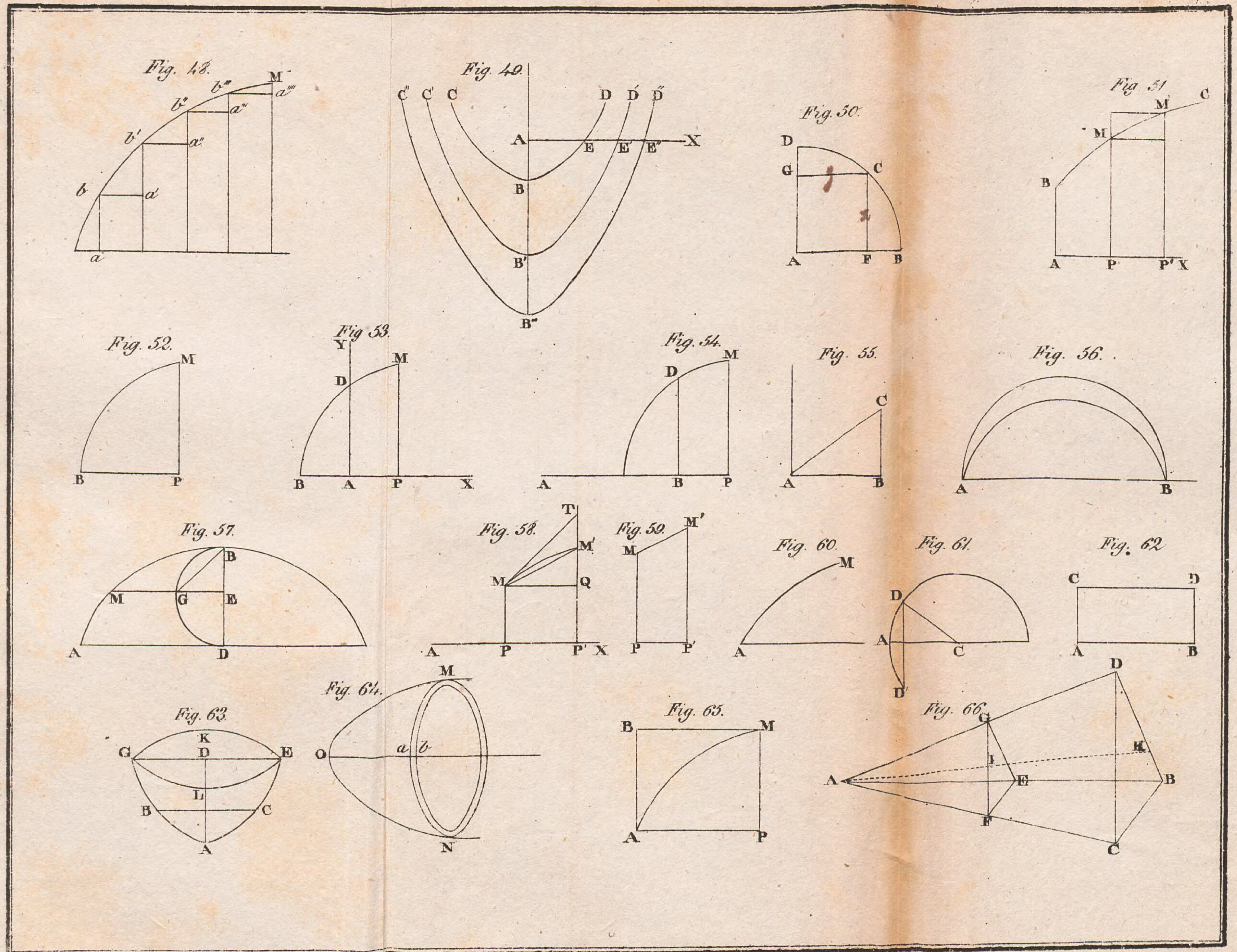
— 405 — 10 v. u. *die* statt *din*.

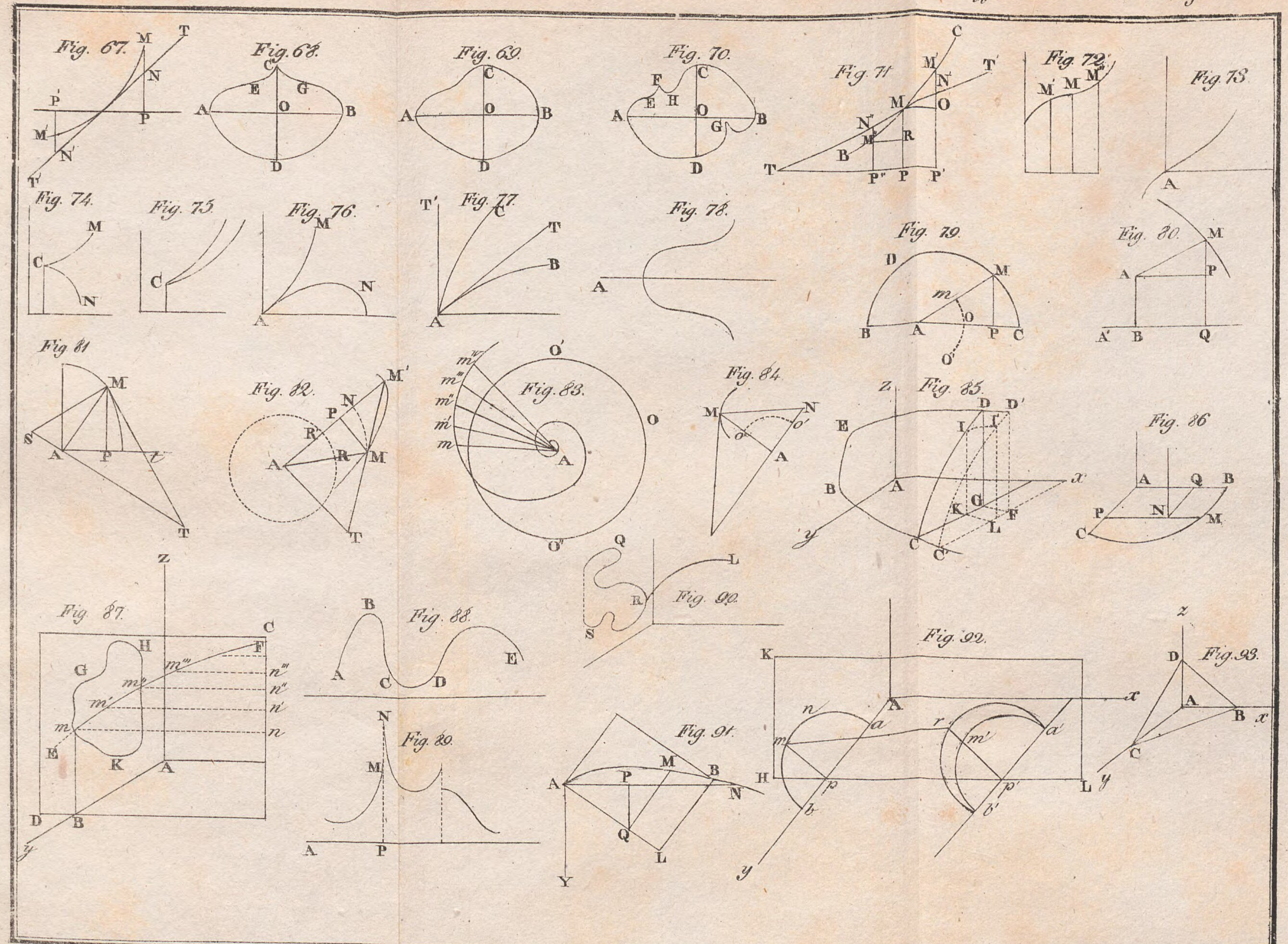
— 413 — 2 fehlt nach QQ′ ein Comma.

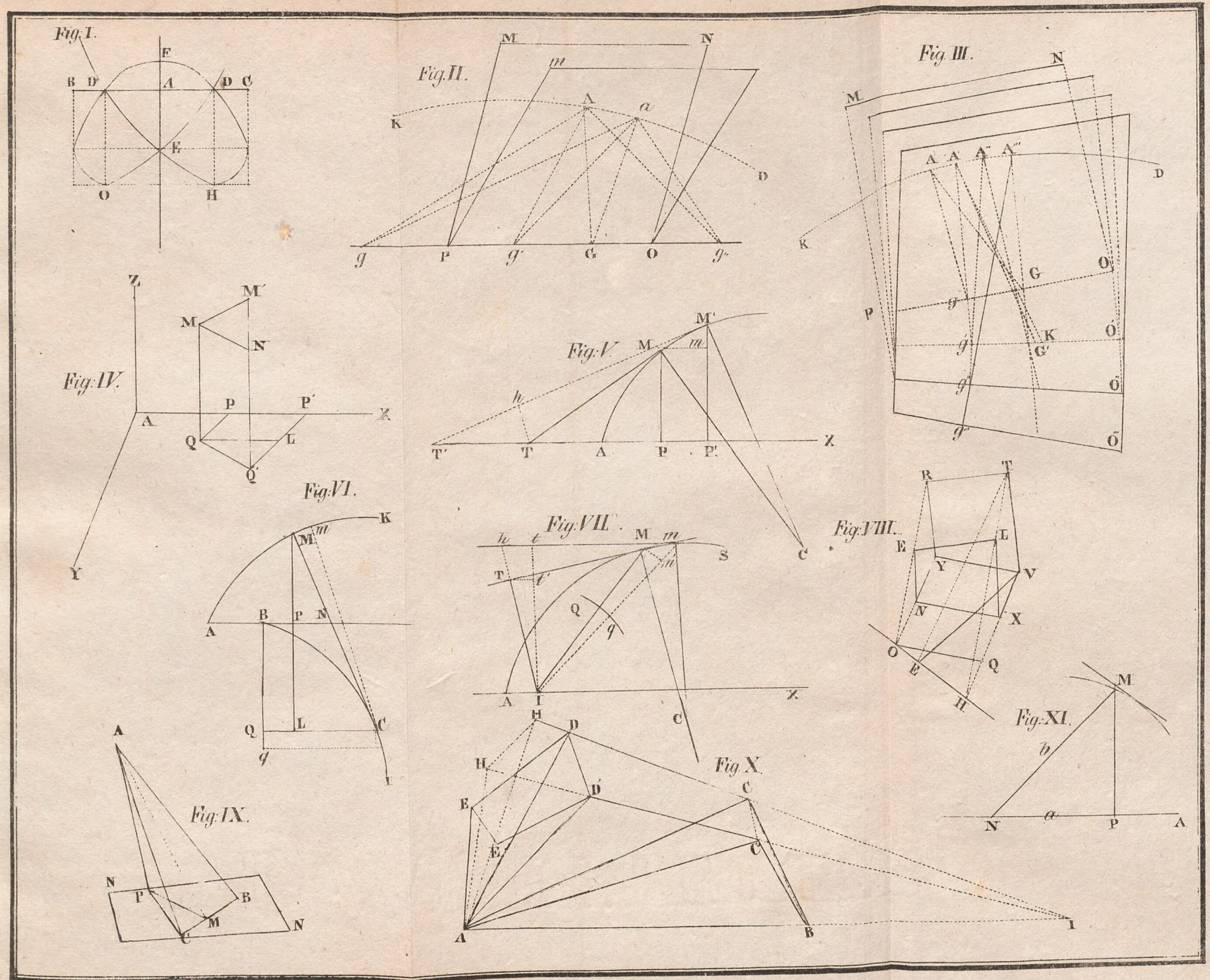
— 414 — 2 v. u. lies: $\gamma = \frac{ds^3}{-dx\,d^2y}$.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.


Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.


Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.


Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.

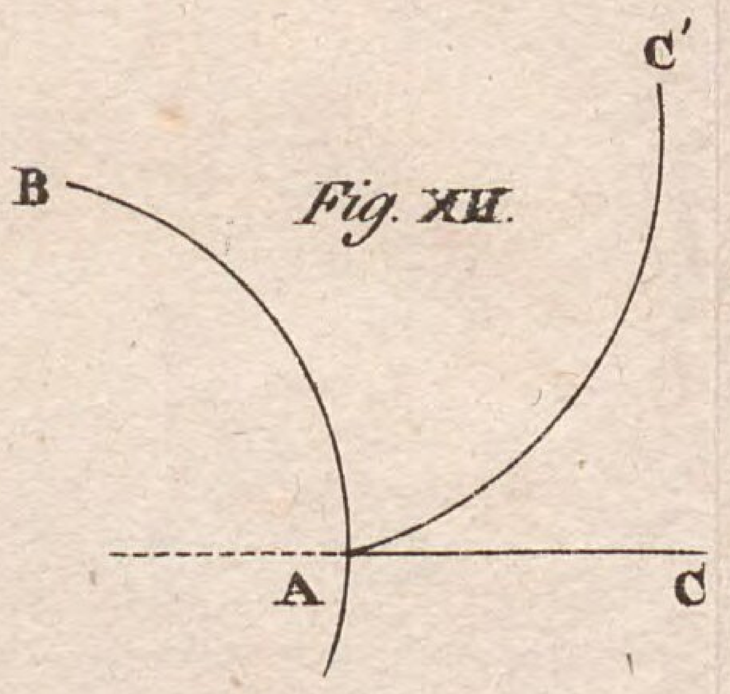


Fig. XII.

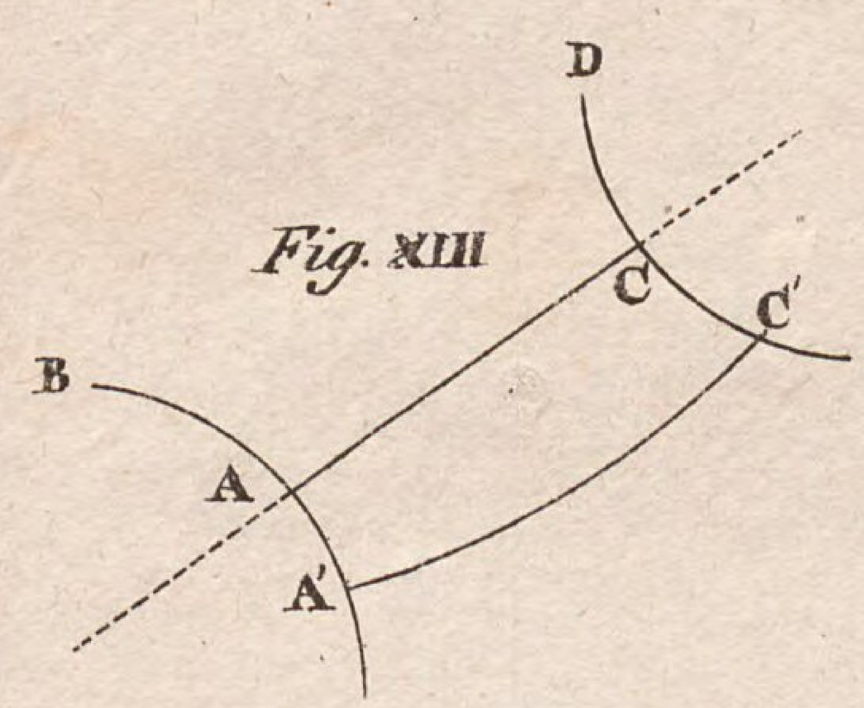


Fig. XIII

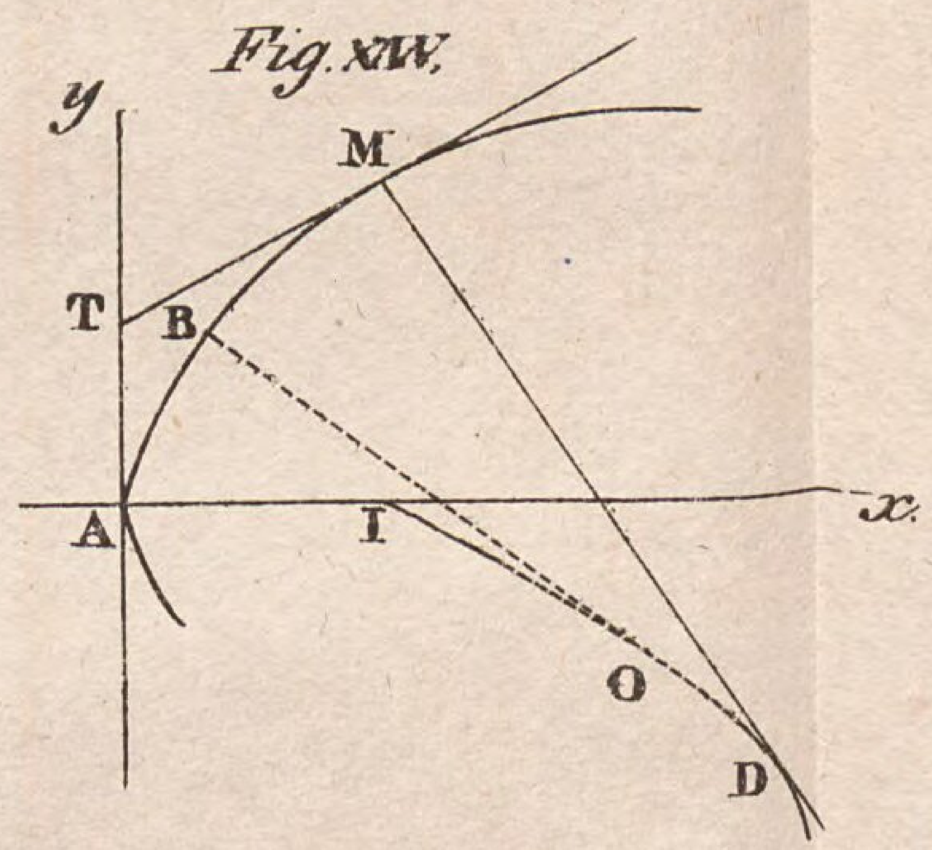


Fig. XIV.

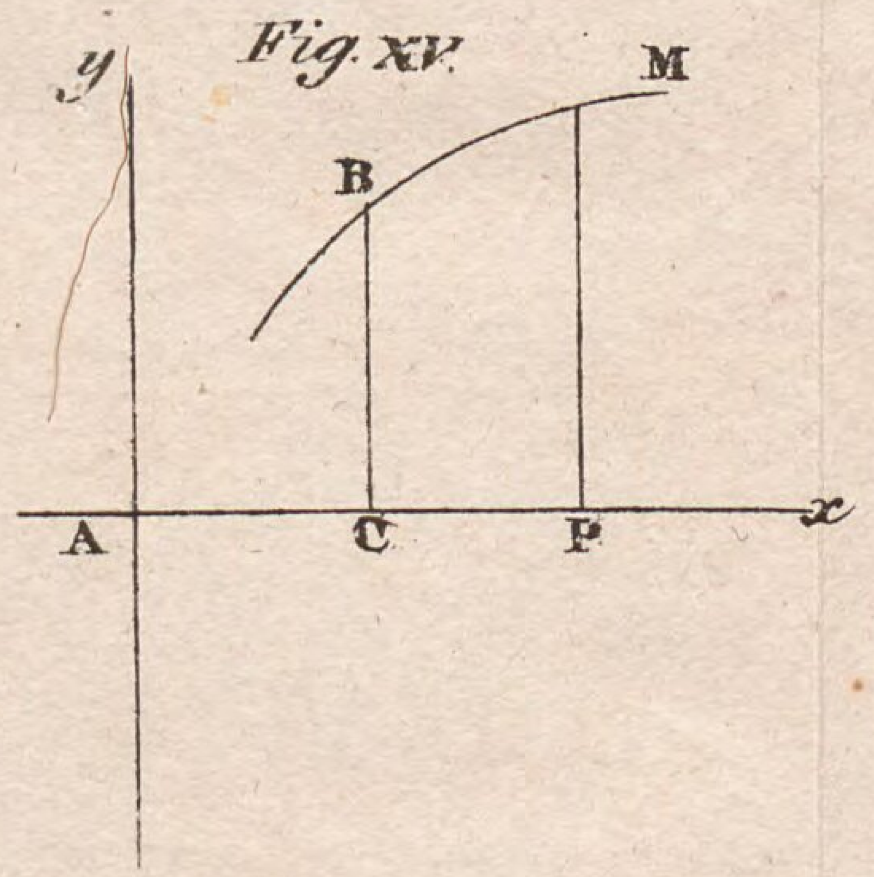


Fig. XV.

Boucharlat, Jean L.

Anfangsgründe der Differential- und Integral-Rechnung Mit 6 Steinabdrücken

Frankfurt a. M. 1823

Math.p. 50 h
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081497-5